AVRIL 2017

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CORRIGÉ DE LA 1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Attention !

L'exercice n° 1 de la présente épreuve est obligatoire et toute note strictement inférieure à 6 à cet exercice est éliminatoire (chaque question de l'exercice n° 1 étant notée sur 1 point).

Globalement cet exercice n'entre toutefois que pour un cinquième dans la note finale de cette première épreuve de mathématiques.

Exercice n° 1

1. Calculer la dérivée de $y = x(1 + x\, Arctg\; x)$ en x=0.

On obtient : $y' = 1 + 2x\, Arctg\; x + \dfrac{x^2}{1+x^2}$ et $y'(0) = 1$

2. Résoudre le système : $\begin{cases} x\,Ln\,x + y\,Ln\,y = 2e \\ \dfrac{x}{y} = 1 \end{cases}$

On obtient x=y, d'où $x\,Ln\,x = e$, soit x=e=y (l'étude rapide de la fonction $x\,Ln\,x - e$ permet de vérifier qu'il n'y a qu'une solution.

3. Calculer $I = \int_0^1 x\,(e^x - 2)\,dx$

$I = \int_0^1 x\,(e^x - 2)\,dx = \int_0^1 xe^x\,dx - 1 = \left[(x-1)e^x\right]_0^1 - 1 = 0$ (Intégration par parties, en posant : $u = x, v' = e^x$

4. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{2^k}$

On a une suite géométrique de raison 1/2. Et $\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{2^k} = \dfrac{1-(1/2^{n+1})}{1-1/2}$ qui tend vers 2

5. Un coureur à pied parcourt les 10 km en 35 minutes. Toutes choses étant égales par ailleurs, quel sera son temps pour parcourir 21 km, sachant qu'il perdra 10 secondes chaque kilomètre.

Si le coureur gardait la même vitesse sur 21 km que 10 km, il parcourrait la distance en : 35minutes*2 + (1/10)*35minutes, soit un temps de : 1h : 13 minutes et 30 secondes. Mais il perd 10 secondes au kilomètre, donc au total il va perdre 3 minutes et 30 secondes.
Le temps sera donc de 1h :17 minutes.

6. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^n \frac{1}{(x+2)(x+1)}dx$

On a : $\frac{1}{(x+2)(x+1)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$ et

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^n \frac{1}{(x+2)(x+1)}dx = \lim_{n\to+\infty}\left[Ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)\right]_0^n = \lim_{n\to+\infty} Ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right) + Ln2 = Ln\,2$$

7. Résoudre l'équation suivante : $x^3\int_{-1}^{1} t^3\,dt + x^2\int_{-1}^{1} t^2\,dt + x\int_{-1}^{1} t\;\;dt - \frac{1}{3}\int_{-1}^{1}\;dt = 0$

On a : $x^3\int_{-1}^{1} t^3\,dt + x^2\int_{-1}^{1} t^2\,dt + x\int_{-1}^{1} t\;\;dt - \frac{1}{3}\int_{-1}^{1}\;dt = 0 + \frac{2}{3}x^2 + 0 - \frac{2}{3} = 0$, soit $x = \pm 1$

8. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{Ln\left|x^2-3x+2\right|}{x}$, où Ln désigne le logarithme népérien.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{Ln\left|x^2-3x+2\right|}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{Ln(x^2-3x+2)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{Ln(x^2(1-3/x+2/x^2))}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2Ln\,x}{x} = 0$$

9. Résoudre dans R^2 le système suivant : $x+y = x\,y = x^2+y^2$

On élève au carré l'équation $x+y = x\,y$ pour obtenir : $3x\,y = x^2+y^2$, soit
$xy\,(3-xy) = 0,\; d'où\;\; x\,y = 0$

donc $(x,\;y) = (0,0)$

10. Pour quelles valeurs, la fonction numérique *f* définie pour *x*>0 par $f\,(x) = x^2\;Ln(x)$ est-elle convexe ?

Sa dérivée est égale à : $f^{'}(x) = 2\,x\,Ln(x) + x$ et la dérivée seconde à $f^{''}(x) = 2\,Ln(x) + 3$
La fonction est convexe si sa dérivée seconde est positive soit $x \geq e^{-3/2}$

Exercice n° 2

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x)=\dfrac{Ln(1-x)}{x-1}$, où Ln désigne le logarithme népérien.

1. Étudier les variations de f et tracer son graphe.

La fonction est définie pour x<1. La dérivée est égale à : $f^{'}(x)=\dfrac{1-Ln(1-x)}{(x-1)^2}$ qui s'annule pour x=1-e. La fonction est décroissante de $]-\infty,1-e]$ sur $]0,-1/e]$ et croissante de $[1-e,1[$ sur $[-1/e,+\infty[$. La droite d'équation x=1 est une asymptote verticale.

2. Calculer $I=\int_{1-e}^{0} f(x)\,dx$

$$I=\int_{1-e}^{0} f(x)\,dx=\int_{e}^{1}\frac{Lnt}{t}\,dt=\left[\frac{1}{2}(Lnt)^2\right]_e^1=-\frac{1}{2}$$

Exercice n° 3

1. Étudier la suite $(u_n)_{1\le n}$ définie par la relation de récurrence : $u_{n+1}=u_n\sin(u_n)$ et $0<u_1<1$

On vérifie aisément par récurrence que : $0<u_{n+1}<1$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\sin(u_n)<1$. La suite est donc décroissante et minorée, elle converge vers une limite l solution de l'équation : $l=l\sin(l)$, soit l=0.

2. Étudier la suite $(v_n)_{1\le n}$ définie par la relation de récurrence : $v_{n+1}=Ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$

On a : $v_{n+1}=Ln(\sin(u_n))\approx Ln(u_n)\to-\infty$ (car la suite u_n tend vers zéro).

Exercice n° 4

Soit $f_n(x)=x^n\,Ln\,x$, où n est un entier strictement positif et x un nombre réel strictement positif.

1. Étudier les variations de f_n et tracer son graphe

Sa dérivée est égale à : $f_n^{'}(x) = x^{n-1}(n\,Ln\,x + 1)$, qui s'annule pour $x = e^{-1/n}$. La fonction peut être prolongée par continuité en zéro, en posant $f_n(0) = 0$ et admettant en ce point une tangente horizontale. Elle admet une branche parabolique à l'infini.

La fonction est décroissante de $\left[0, e^{-1/n}\right]$ sur $\left[0, \frac{-1}{n\,e}\right]$ et croissante par la suite.

2. Étudier la convexité de f_n

Sa dérivée seconde est égale à : $f_n^{''}(x) = x^{n-2}(n(n-1)Ln\,x + 2n - 1)$ qui est nulle pour $x = \exp\left(\frac{1-2n}{n(n-1)}\right)$ et la fonction est convexe après cette valeur.

3. Calculer $I_n = \int_1^e f_n(x)\,dx$

Par intégration par parties, on obtient : $I_n = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} Ln\,x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^n}{n+1} dx = \frac{1}{(n+1)^2}(n\,e^{n+1} + 1)$

Exercice n° 5

Soit la fonction numérique g définie par : $g(t) = (1+t)\,Ln\,(1+t) + 2t$.

1. Étudier les variations de g.

La fonction est définie pour t >-1 et sa dérivée est égale à : $g^{'}(t) = Ln\,(1+t) + 3$ qui est nulle pour $t = e^{-3} - 1$ et $g(e^{-3} - 1) = -2 - e^{-3} < 0$ et $g(0) = 0$. La fonction est décroissante pour $t < e^{-3} - 1$ et croissante pour $t > e^{-3} - 1$

2. Soit la fonction numérique f définie par $f(x) = x\,Ln\,(1+x^2)$

Étudier les variations de f et tracer son graphe.

La fonction est impaire, donc son graphe est symétrique par rapport à l'origine et il suffit de l'étudier sur les réels positifs.

Sa dérivée est égale à : $f^{'}(x) = \frac{1}{1+x^2}\left((1+x^2)Ln(1+x^2) + 2x^2\right) = \frac{g(x^2)}{1+x^2} > 0$

Son graphe admet une branche parabolique dans la direction Oy, avec *f(0)=0 ;*

3. Calculer $I = \int_0^1 f(x)\,dx$

Par intégration par parties, on obtient : $I = \left[\frac{x^2}{2}Ln(1+x^2)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}Ln2 - J$

Avec $J = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 (x - \frac{x}{1+x^2})\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}Ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}Ln2$, d'où

$I = Ln2 - \frac{1}{2}$

Exercice n° 6

On considère les deux fonctions $f(x) = Ln(x+e)$ et $g(x) = \sqrt{x+1}$ définies sur l'ensemble des réels positifs.

1. Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$

On considère la fonction : $h(x) = f(x) - g(x)$, sa dérivée est égale à :
$h'(x) = \frac{1}{x+e} - \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{2\sqrt{x+1}-(x+e)}{2(x+e)\sqrt{x+1}}$. Le dénominateur est positif et on pose $u(x) = 2\sqrt{x+1}-(x+e)$, dont la dérivée est strictement négative, et u est à valeurs dans $[2-e, -\infty[$. La dérivée de h est négative et seule x=0 est solution de l'équation.

2. Dans une course à pied de 15 km, après 15 minutes de course, les deux concurrents en tête se trouvent sur une même ligne. Si x désigne la distance restante à parcourir, la probabilité que le coureur A gagne la course est égale à $\frac{1}{f(x)}$ et pour le coureur B à $\frac{1}{g(x)}$. Cet énoncé a-t-il un sens? Qui a le plus de chance de gagner la course ?

On a, pour x positif, $f(x)$ et $g(x)$ minorés par 1 donc les valeurs $\frac{1}{f(x)}$ et $\frac{1}{g(x)}$ sont comprises entre zéro et 1 et peuvent correspondre à des probabilités.

Soit $y = f(x) - g(x) = Ln(x+e) - \sqrt{x+1}$ sur R^+, d'après la première question y est décroissante et négative. En conclusion: $f(x) \leq g(x)$.
Comme $f(x) \leq g(x)$, A à plus de chances de gagner la course.

Exercice n° 7

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{1 \leq n}$ définie par : $u_n = \frac{1}{nC_{2n}^n}$,

où C_{2n}^n désigne le nombre de parties à n éléments pris parmi un ensemble à 2n éléments.

Il est clair que la suite $(u_n)_{1 \leq n}$ est positive. On a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{nC_{2n}^n}{(n+1)C_{2n+2}^{n+1}} = \frac{n}{n+1} \times \frac{(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)} \approx \frac{n^3}{4n^3} \approx \frac{1}{4} < 1$$

La suite $(u_n)_{1 \leq n}$ est donc décroissante et minorée par zéro, donc elle converge.

On pouvait le voir directement : $0 \leq u_n = \frac{1}{nC_{2n}^n} = \frac{n!n!}{n(2n)!} = \frac{\prod_{k=1}^{n-1} k}{\prod_{k=n+1}^{2n} k} \leq \frac{1}{2n} \to 0$ (on a n-1 termes au numérateur et n termes au dénominateur)

AVRIL 2017

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CORRIGÉ DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice n° 1

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels positifs par : $f(x) = \dfrac{Ln(1+x)}{\sqrt{1+x}}$, où Ln désigne le logarithme népérien.

1. Étudier les variations de f et tracer son graphe.

La dérivée de la fonction est égale à : $f'(x) = \dfrac{(2 - Ln(1+x))}{2(\sqrt{1+x})(1+x)}$ et elle est du signe du numérateur qui s'annule pour $x = e^2 - 1$. La limite à plus l'infini est nulle. L'axe horizontal donne une asymptote.

x	0 $\qquad$ $e^2 - 1$	$+\infty$
$f'(x)$	+	-
$f(x)$	0 $\nearrow$ 2/e	$\searrow$ 0

2. Calculer $I = \int_0^1 f(x)\,dx$

En posant $u = \sqrt{1+x}$, on obtient :

$$I = \int_0^1 f(x)\,dx = 4\int_1^{\sqrt{2}} Lnu\; du = 4\left[u\,Lnu - u\right]_1^{\sqrt{2}} = 4(\sqrt{2}\,Ln\sqrt{2} - \sqrt{2} + 1)$$

3. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f''(x) = 0$.

La dérivée seconde est égale à : $f''(x) = \dfrac{-\left[2 + 3(2 - Ln(1+x))\right]}{4(1+x)^{5/2}}$. Cette dérivée seconde est nulle quand le numérateur est nul.

Soit $2 + 3(2 - Ln(1+x)) = 0$ ou encore $Ln(1+x) = 8/3$, soit $x_0 = e^{8/3} - 1$. La fonction est concave sur $[0, x_0]$

Exercice n° 2

Soit la fonction *f* définie sur *R* par : $f(x) = \dfrac{-3x+1}{x^3+x^2+x+1}$

1. Étudier les variations de *f* et tracer son graphe.

On peut remarquer que le dénominateur s'écrit : $x^3+x^2+x+1 = (x+1)(x^2+1)$.

Sa dérivée est égale à : $f'(x) = \dfrac{2(x-1)(3x^2+3x+2)}{(x^3+x^2+x+1)^2}$ qui s'annule uniquement en 1.

Le graphe de la fonction passe par les points de coordonnées (0,1) ; (1/3 ,0) et (1,-1/2). L'axe ox est une asymptote horizontale et l'axe d'équation x=-1, une asymptote verticale.

x	$-\infty$ -1	-1 1	1 $+\infty$
$f'(x)$	-	-	+
$f(x)$	0 ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘	↗ 0

2. Trouver les constantes *a*, *b*, *c* qui vérifient : $f(x) = \dfrac{ax+b}{x^2+1} + \dfrac{c}{x+1}$

Par identification des polynômes, on obtient : *a*=-2 ;*b*=-1 et *c*=2.

3. Calculer $I = \int_0^1 f(x)\,dx$

$$I = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \left(\frac{-2x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} + \frac{2}{x+1}\right) dx = \left[-Ln(x^2+1) - Arctg\,x + 2Ln(x+1)\right]_0^1 = Ln2 - \frac{\pi}{4}$$

Exercice n° 3

Soit la fonction *f* définie sur *R* par : $f(x) = \dfrac{1+x^2}{1+x}$.

1. Étudier les variations de *f* et tracer son graphe.

La fonction peut s'écrire : $f(x) = \dfrac{1+x^2}{1+x} = x-1+\dfrac{2}{1+x}$. Cette fonction admet la droite d'équation *y*=*x*-1 comme asymptote oblique et la droite *x*=-1 comme asymptote verticale.

Sa dérivée est égale à : $f'(x) = 1 - \dfrac{2}{(1+x)^2} = \dfrac{x^2+2x-1}{(1+x)^2}$ et elle s'annule pour $x = -1 \pm \sqrt{2}$.

Par ailleurs, $f(-1-\sqrt{2}) = -\dfrac{4+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ et $f(-1+\sqrt{2}) = \dfrac{4-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

Tableau des variations :

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		-1		$-1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	+ -					-		+	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$ $-\infty$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

2. Montrer que le graphe de *f* admet un centre de symétrie que l'on précisera.

On pose $Y = y+2; X = x+1$ pour obtenir la fonction impaire : $Y = X + \dfrac{2}{X}$. Le point de coordonnées (-1, -2) est donc un centre de symétrie.

3. Calculer $I = \int_0^1 f(x)\,dx$

$$I = \int_0^1 f(x)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - x + 2\,Ln(x+1)\right]_0^1 = -\frac{1}{2} + 2\,Ln\,2$$

4. Étudier la suite (u_n) définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 \geq 0$.

Si la suite est convergente vers une limite *l*, alors cette limite vérifie : $l = f(l)$, soit *l*=1.
La seule limite possible est donc 1. Tous les termes de la suite sont positifs.
Si $u_0 = 0$ ou 1, alors $u_n = 1$ et la suite est stationnaire en 1.

On remarque que : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1-u_n}{1+u_n}$

Si $u_0 < 1$. On suppose que $u_n < 1$, alors $u_{n+1} < 1 \Leftrightarrow \dfrac{1+u_n^2}{1+u_n} < 1 \Leftrightarrow u_n(u_n - 1) < 0$, ce qui est vrai. Par conséquent : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1-u_n}{1+u_n} > 0$. La suite est donc croissante et majorée, et elle converge vers 1.

Si $u_0 > 1$, par un raisonnement analogue, la suite est décroissante minorée et elle converge vers 1.

5. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes *C*, l'équation : $f(z) = 1+i$

On pose $z = x + i\,y$, d'où $1 + (x+i\,y)^2 = (1+i)(1+x+i\,y)$, ce qui donne le système :

$$\begin{cases} 1+x-y = 1+x^2-y^2 \\ 1+x+y = 2xy \end{cases} \text{ ou encore } \begin{cases} (x-y)(x+y-1) = 0 \\ 1+x+y = 2xy \end{cases}$$

Si $x+y-1=0$, alors dans la deuxième ligne, on obtient : $-x^2+x-1=0$ qui n'admet pas de racines réelles.

Si $x-y=0$, alors dans la deuxième ligne, on obtient : $2x^2-2x-1=0$, soit $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}}{2} = y$

Exercice n° 4

On considère la fonction numérique *f* définie sur R^{+*} par : $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{-x}$

1. Étudier les variations de *f* et tracer son graphe.

$f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{-x} = e^{-x\,Ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$ et sa dérivée est égale à : $f^{'}(x) = (\frac{1}{1+x} - Ln\left(1+\frac{1}{x}\right))\, f(x)$

Le signe de la dérivée est celui de $u(x) = \frac{1}{1+x} - Ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$. On a : $u^{'}(x) = \frac{1}{x(1+x)^2} > 0$

La fonction *u* est strictement croissante de R^{+*} sur $\left]-\infty, 0\right[$ et la fonction *f* est donc décroissante de R^{+*} sur $\left]1, 0\right[$. On peut prolonger *f* par continuité en zéro, en posant : *f*(0)=1.

2. La fonction *f* admet-elle un point fixe ?

Il faut donc résoudre l'équation $f(x) = x$, à savoir : $-x\,Ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = Ln\,x$.

Soit $-x\,Ln(1+x) + (x-1)\,Ln\,x = 0$. On pose $t = -x\,Ln(1+x) + (x-1)\,Ln\,x$,

puis $t^{'} = Ln\left(\frac{x}{1+x}\right) - \frac{1}{x(x+1)} < 0$ et la fonction *t* est continue, strictement décroissante, à valeurs dans *R*, elle admet donc une unique valeur nulle, et donc un seul point fixe pour la fonction *f*.

Exercice n° 5

Soit *a* un nombre réel fixé non nul. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = a$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = e^{2u_n} - e^{u_n}$.

1. Étudier la monotonie de la suite (u_n)

On a : $u_{n+1} - u_n = e^{2u_n} - e^{u_n} - u_n$. Posons $g(x) = e^{2x} - e^{x} - x$. Sa dérivée est égale à : $g^{'}(x) = 2e^{2x} - e^{x} - 1 = (e^{x} - 1)(2e^{x} + 1)$ qui s'annule en zéro (minimum) et qui est toujours positive. Par conséquent $u_{n+1} - u_n \geq 0$ et la suite est croissante.

2. Étudier le signe de la suite (u_n) pour *a* négatif.

Si *a* = 0, la suite est stationnaire égale à 0.
Si *a* < 0, on vérifie par récurrence que $u_n < 0$, en effet $u_{n+1} = e^{2u_n} - e^{u_n} = e^{u_n}\,(e^{u_n} - 1) < 0$

3. Étudier la convergence de la suite (u_n) pour *a* négatif.

La suite étant croissante et majorée par zéro, elle converge vers une limite *l* solution de l'équation ; *g(l)* = 0, soit *l* = 0.

4. On suppose que $a > 0$.
- Montrer que $u_{n+1} - u_n \geq g(a)$
- Déterminer la limite de la suite (u_n)

D'après la première question, la suite est croissante ainsi que la fonction g (sur les réels positifs), donc $g(u_n) \geq g(a)$, ce qui est l'inégalité demandée.
On a : $u_n - a = (u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + ... + (u_1 - a) \geq n\, g(a)$.
La suite converge donc vers plus l'infini.

Exercice n° 6

Le profil d'un toboggan est modélisé par une fonction f définie sur l'intervalle $[1,8]$ (unité de mesure en mètres) par : $f(x) = (ax+b)\, e^{-x}$, où a et b sont deux entiers naturels.

1. Étudier les variations de f et tracer son graphe pour $a = 3$ et $b = 1$ (on étudiera également sa convexité).

On obtient $f'(x) = (2-3x)\, e^{-x}$. Cette dérivée est toujours négative sur l'intervalle considéré et la fonction est décroissante de $[1,8]$ sur $[4/e, 25/e^8]$.
Sa dérivée seconde est égale à : $f''(x) = (3x-5)\, e^{-x}$. La fonction est concave pour $x < 5/3$ et convexe pour $x > 5/3$.

2. Déterminer la valeur de b pour que la tangente au graphe de f au point d'abscisse 1 soit horizontale.

Il faut que la dérivée soit nulle en 1, soit $f'(x) = (-ax - b + a)\, e^{-x}$ et $f'(1) = (-b)\, e^{-1} = 0$, donc $b = 0$.

3. On souhaite de plus que le haut du toboggan soit situé entre 3,5 et 4 mètres de haut. Déterminer la valeur de a.

On a : $f(x) = ax\, e^{-x}$ et pour $x = 1$, $3{,}5 \leq y = f(1) = \dfrac{a}{e} \leq 4$. Comme $e \approx 2{,}7$, on obtient $a = 10$.

4. Le mur de soutènement du toboggan sera peint par un artisan sur une seule face (partie entre le sol et le toboggan). Sur le devis proposé, l'artisan demande un forfait de 200 euros augmenté de 30 euros par mètre carré peint. Quel sera le montant du devis (on donne $e \approx 2{,}7; \dfrac{1}{e} \approx 0{,}37$ et $e^{-8} \approx 0$) ?

Calculons la surface à peindre, soit $I = \int_1^8 10x\, e^{-x}\, dx$. En intégrant par parties, on obtient :

$$I = \left[-10\, x\, e^{-x}\right]_1^8 - \int_1^8 10\, e^{-x}\, dx = -80\, e^{-8} + 10\, e^{-1} - 10\left[-e^{-x}\right]_1^8 = -90\, e^{-8} + 20\, e^{-1} \approx 7{,}4$$

Donc le devis sera de 200+30*7,4=422 euros.