AVRIL 2017

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

L'épreuve comporte deux exercices et un problème indépendants, à traiter dans un ordre quelconque.

Exercice 1

Soit un entier n strictement positif.
On note (d_1, d_2, ….., d_k) les k diviseurs de n, indicés en sens strictement croissant, avec $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_{k-1} < d_k = n$.
1 – On donne n = 6.
Quelles sont les valeurs des 4 diviseurs (d_1, d_2, d_3, d_4) de 6.
Montrer que $(\prod_{j=1}^{4} d_j)^2 = 6^4$

Les 4 diviseurs de 6 sont 1, 2, 3, 6.
$6^4 = 1296$
1 x 2 x 3 x 6 = 36
$36^2 = 1296$

2 – On se place dans le cas général.
Démontrer la relation suivante :

$$(\prod_{j=1}^{k} d_j)^2 = n^k$$

Soit $n = d_j.q_j$ pour j = 1 à k, q_j étant la division de n par d_j.
On remarque que pour j = 1, $d_1 = 1$ et donc $q_1 = n = d_k$
De même, pour j = k, $d_k = n$ et donc $q_k = 1 = d_1$
Plus généralement, si d_j divise n, alors q_j divise n ; les q_j sont donc des d_j classés dans l'ordre inverse décroissant.
Donc $(\prod_{j=1}^{k} d_j) = (\prod_{j=1}^{k} q_j)$

Puisque $n = d_j.q_j$, $n^k = (\prod_{j=1}^{k} d_j q_j) = (\prod_{j=1}^{k} d_j)(\prod_{j=1}^{k} q_j) = (\prod_{j=1}^{k} d_j)^2$

Exercice 2

Rappel : soient 2 événements A et B, de probabilités P(A) et P(B) non nulles.
On rappelle que la probabilité de A conditionnellement à B, notée P(A/B) est donnée par :

$$P(A/B) = P(A \cap B)/P(B) = P(B / A).P(A)/P(B)$$

Dans un pays imaginaire, on sait a priori que 3 % des automobilistes du pays conduisent en état d'ébriété. Le gouvernement lance une campagne de lutte contre l'alcool au volant.
A cet effet, la gendarmerie est équipée d'un alcootest dont les performances sont les suivantes :

- Dans 2 % des cas, l'alcootest est positif à tort (la personne contrôlée n'est pas en état d'ébriété)
- Dans 96 % des cas, l'alcootest est positif à juste titre (la personne contrôlée est effectivement en état d'ébriété)

1 – Calculer la probabilité que l'alcootest soit positif.

On note :
E = être en état d'ébriété
S = ne pas être en état d'ébriété = être sobre
+ = alcootest positif
N = alcootest négatif

D'après les données de l'énoncé :
P(E) = 3 %
P(S) = 97 %
P(+/S) = 2 %
P(+/E) = 96 %

Pour connaître P(+), on écrit P(+) = P(+/S).P(S) + P(+/E).P(E) = 0,02 x 0,97 + 0,96 x 0,03 = 0,0482

2 – Calculer la probabilité qu'un conducteur ne soit pas en état d'ébriété alors que son alcootest a été positif.
Quelle conclusion en tirez-vous ?
On cherche à évaluer P(S/+).
P(S/+) = P(+/S).P(S) / P(+) = 0,02 x 0,97 / P(+) = 0,0194 / P(+)

En utilisant le résultat de la question 1, P(+) = 0,0482, la probabilité qu'un conducteur soit sobre alors que le contrôle par alcootest est positif est donc de 0,0194 / 0,0482 = 40,2 %, ce qui est très élevé.

Donc :
a) Les performances – en terme de fiabilité – de l'alcootest sont très insuffisantes et doivent être largement améliorées
b) Il est nécessaire de compléter l'alcootest par d'autres types de contrôle (par exemple une prise de sang)

Problème
Soient n et p deux nombres entiers naturels strictement positifs.
On considère la famille G(n, p), dépendant des paramètres n et p, des fonctions $g_{n,p}$ définies sur [0, + ∞[par :
$x \to g_{n,p}(x) = (x^n)e^{(-x^p)}$

Partie I
Dans cette première partie, on prend n = 1 et p = 2.
Pour simplifier, on notera par g la fonction $g_{1,2}$: $g_{1,2}(x) = x\, e^{-x^2}$.

I-1. Calculer g' et g'', dérivées première et seconde de g, et étudier leur signe.

Un calcul direct donne :
$g'(x) = (1 - 2x^2)\, e^{-x^2}$

et $g''(x) = 2x(2x^2 - 3)e^{-x^2}$

Dérivée première : comme x > 0, elle s'annule en $1/\sqrt{2}$ ~ 0,707, est positive avant, négative après.
Dérivée seconde : elle s'annule en $\sqrt{3/2}$ ~ 1,22, négative avant et positive après.

I-2. Etudier très précisément les variations de g (limites, asymptotes, points caractéristiques et pentes en ces points, convexité, …). Etudier la position de G, graphe de g, par rapport à la première bissectrice d'équation y = x. Donner le tableau de variation de g.

Limites :
Quand x → 0, g → 0.
Pente en 0 : lim (g(x) – 0)/x = 1
Tangente en 0 : y = x
Quand x → + ∞, g → 0.
L'axe des abscisses est asymptote horizontale (y = 0)

Points caractéristiques :
Le maximum est atteint en $1/\sqrt{2}$ et vaut $M = 1/\sqrt{2e}$ ~ 0,43

Point d'inflexion en $\sqrt{3/2}$; $g(\sqrt{3/2}) = \sqrt{3/2}\,.\,e^{-3/2}$ ~ 0,27
Tangente au point d'inflexion : $(y - \sqrt{3/2}\,.\,e^{-3/2}) = (x - \sqrt{3/2})\,(-2\,e^{-3/2})$
$y = -2\,x\,e^{-3/2} + 3\sqrt{3/2}\,.\,e^{-3/2}$

Soit E l'écart entre la bissectrice et G : $E = x - x\,e^{-x^2} = x(1 - e^{-x^2}) > 0$.
G est donc toujours en dessous de la bissectrice (sauf en 0).
<u>Tableau de variations</u>

x	0		$1/\sqrt{2}$		$\sqrt{3/2}$		+ ∞
g'		+	0		-		
g	0	↗	0,43	↘			0

La fonction est concave sur] 0, $(3/2)^{1/2}$[et convexe sur] $(3/2)^{1/2}$, + ∞[

I-3. Donner la forme du graphe G de g.

Croissant de 0 à $1/\sqrt{2}$, avec tangente y = x en 0, décroissant ensuite avec inflexion en $\sqrt{3/2}$.
y = 0 est asymptote horizontale.

I-4. On définit l'intégrale $L_1 = \int_0^{+\infty} g(x)dx$
Calculer L_1.

$L_1 = \int_0^{+\infty} x\,e^{-x^2}dx$
On pose $u = x^2$; u varie de 0 à + ∞ ; du = 2xdx

$L_1 = \int_0^{+\infty} e^{-u}du/2 = [-e^{-u}]_0^{\infty}/2 = 1/2$

Partie II
Dans cette deuxième partie, on prend n = 3 et p = 2.
On notera par g_3 la fonction $g_{3,2}$: $g_{3,2}(x) = x^3e^{-x^2}$.

II-1. Etudier très précisément les variations de g_3 : limites, asymptotes, étude des dérivées première et seconde, points d'inflexion, points caractéristiques, convexité, … Dresser le tableau de variation de g_3.

En s'inspirant de la partie I.

$g_3'(x) = x^2(3 - 2x^2)\, e^{-x^2}$

Elle s'annule en $x = 0$ et en $x = \sqrt{3/2}$; en $x = 0$, la valeur de g_3 est 0, et la pente est évidemment 0 ; en $x = \sqrt{3/2}$, la valeur de g_3 est voisine de 0,41.

$g_3''(x) = 2x(2x^4 - 7x^2 + 3)e^{-x^2}$

Posons $v = x^2$ et résolvons l'équation $2v^2 - 7v + 3 = 0$

Son discriminant est égal à 25, donc deux racines admissibles pour v, car > 0 : 1/2 et 3.

Donc deux points d'inflexion : $x_1 = 1/\sqrt{2}$ et $x_2 = \sqrt{3}$.

$g_3(1/\sqrt{2}) = (1/\sqrt{2})^3\, e^{-1/2}$, voisin de 0,21

Pente en ce premier point d'inflexion : $e^{-1/2}$, voisin de 0,61

$g_3(\sqrt{3}) = (3\sqrt{3})\, e^{-3}$, voisin de 0,26

Pente en ce deuxième point d'inflexion : $-9\, e^{-3}$, voisin de – 0,45

Limites :

Quand $x \to 0$, $g_3 \to 0$.

Quand $x \to +\infty$, $g \to 0$.

L'axe des abscisses est asymptote horizontale ($y = 0$)

II-2. Donner la forme du graphe G_3 de g.

Croissant de 0 à $\sqrt{3/2}$, avec tangente horizontale en 0, décroissant ensuite ; deux points d'inflexion en $1/\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$.

Quand x est grand, $y = 0$ est asymptote horizontale.

II-3. Etudier l'intersection de G et G_3.

$x\, e^{-x^2} - x^3 e^{-x^2}$ s'annule pour $x - x^3 = x(1 - x^2) = 0$, soit en $x = 0$ et $x = 1$.

Pour x entre 0 et 1, G est au-dessus de G_3 ; pour $x > 1$, G passe au-dessous de G_3.

II-4. On définit l'intégrale $L_3 = \int_0^{+\infty} g_3(x)dx$

Calculer L_3.

$L_3 = \int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx$

On pose $u = x^2$; u varie de 0 à $+\infty$; $du = 2xdx$

$L_3 = \int_0^{+\infty} ue^{-u} du/2$

En intégrant par parties, on a :

$2L_3 = [-ue^{-u}]_0^{\infty} + [-e^{-u}]_0^{\infty} = 1$

D'où $L_3 = 1/2$

Partie III

Dans cette troisième partie, on prend p = 2, et n est un entier quelconque strictement positif.

On notera par g_n la fonction $g_{n,2}$: $g_{n,2}(x) = x^n e^{-x^2}$.

III-1. Montrer que g_n passe par un maximum pour un point d'abscisse $\alpha(n)$ que l'on déterminera.

La dérivée est $g'_{n,2}(x) = x^{n-1}(n - 2x^2)e^{-x^2}$,
Elle s'annule pour x = 0 et pour $x^2 = n/2$, d'où la valeur de $\alpha(n) = \sqrt{n/2}$

III-2. On pose $u(n) = g_n(\alpha(n))$.
Calculer u(n).
Montrer que la suite {u(n)}, $n \geq 3$, est croissante.
$u(n) = g_n(\alpha(n)) = (n/2)^{n/2}e^{-n/2} = (n/2e)^{n/2}$
On remarque que u(n) peut s'écrire sous la forme exp[(n/2)(Ln(n/2) – 1)].
Considérons la fonction h définie sur x > 0 par h(x) = exp[(x/2)(Ln(x/2) – 1)].
Sa dérivée est h'(x) = h(x).[Ln(x/2)/2], s'annule en x = 2.
Donc h est décroissante entre 0 et 2, puis croissante après 2.

Comme u(n) n'est autre que la restriction de h aux entiers naturels, on en déduit que u(n) est croissante pour n > 2, c'est-à-dire pour $n \geq 3$.

Exemples de calculs numériques :
$u(1) = (1/2e)^{1/2} = 0{,}43$
$u(2) = 1/e = 0{,}37$
$u(3) = (3/2e)^{3/2} = 0{,}41$

III-3. On définit l'intégrale $L(n) = \int_0^{+\infty} g_n(x)dx$.
Trouver une relation de récurrence entre L(n) et L(n-2).

$L(n) = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2} dx$
Intégrons par parties : $L(n) = [x^{n+1}e^{-x^2}/(n+1)]^{\infty}_0 + (2/(n+1)) \int_0^{+\infty} x^{n+2}e^{-x^2}dx$

D'où : L(n) = (2/(n+1))L(n+2), soit L(n+2) = (n+1)L(n) / 2

Ou encore : L(n) = (n-1) L(n-2) /2

Partie IV
On considère dans cette partie le cas général $g_{n,p}(x) = x^n e^{-x^p}$.

IV-1. Donner l'expression de $g'_{n,p}$, dérivée première de $g_{n,p}$.
Etudier les racines éventuelles de l'équation $g'_{n,p}(x) = 0$ et en déduire le signe de $g'_{n,p}$.

Le calcul direct permet d'établir simplement que $g'_{n,p}(x) = x^{n-1}(n - px^p)e^{-x^p}$.
La dérivée s'annule pour $n - px^p = 0$, soit $x = (n/p)^{1/p}$.
La fonction $g_{n,p}$ est donc croissante de 0 à $(n/p)^{1/p}$, décroissante ensuite.

IV-2. Donner l'expression de $g''_{n,p}$, dérivée seconde de $g_{n,p}$. Etudier son signe et en déduire la concavité de $g_{n,p}$.

Par calcul direct, on obtient :
$g''_{n,p}(x) = x^{n-2}A(n, p, x)e^{-x^p}$.

où $A(n, p, x) = p^2x^{2p} - x^p(p^2 + 2np - p) + n(n-1)$

En posant $w = x^p$, on a à résoudre une équation du second degré en w :
$p^2w^2 - w(p^2 + 2np - p) + n(n-1) = 0$

Son discriminant Δ est > 0, égal à $p^2((p-1)^2 + 4np)$.

Il existe donc des racines :
$w_1 = [(p^2 + 2np - p) - \Delta^{1/2}]/2p^2$
$w_2 = [(p^2 + 2np - p) + \Delta^{1/2}]/2p^2$

w_2 est évidemment positive.
w_1 l'est également car un calcul simple permet d'établir que $[(p^2 + 2np - p)]^2$ est égal à $\Delta + 4np^2(n-1)$.

Les racines p-ièmes de w_1 et w_2 sont donc des points d'inflexion.
Remarque : pour $n = 1$ et $p = 2$, on retrouve les résultats de la partie I.

IV-3. En déduire les variations de $g_{n,p}$. Etudier ses points particuliers, et donner la forme générale de son graphe $G_{n,p}$.

La fonction $g_{n,p}$ est croissante de 0 jusqu'à $(n/p)^{1/p}$, décroissante ensuite ; elle prend la valeur 0 en $x = 0$ avec une tangente horizontale, et admet $y = 0$ comme asymptote horizontale, deux points d'inflexion.

IV-4. Montrer que toutes les courbes $\{G_{n,p}\}$ passent par un point fixe A ; donner les coordonnées de A ainsi que l'équation de la tangente en A à $G_{p,q}$.

Le point fixe A est tel que $x = 1$, et $g_{n,p}(1) = 1/e$.
La pente en A est $g'_{n,p}(1) = (n - p)/e$
L'équation de la tangente en A est :
$y - 1/e = (x - 1)(n - p)/e$
$y = (x - 1)(n - p)/e + 1/e$

AVRIL 2017

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

L'épreuve est composée de quatre problèmes indépendants, portant tous sur les matrices. Ils sont à traiter dans un ordre quelconque.

Problème 1 : diagonalisation

M_2 désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2, à coefficient réels.

Soit A une matrice de M_2 : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$.

Montrer que A est diagonalisable dans R, ensemble des nombres réels.

On sait que toute matrice symétrique est diagonalisable.

Montrons-le dans ce cas : le polynôme caractéristique est $P(x) = (a - x)(c - x) - b^2 = x^2 - (a+c)x + ac - b^2$

Son discriminant est $(a+c)^2 - 4(ac - b^2) = (a - c)^2 + 4b^2 \geq 0$

$\Delta = 0$ si $a = c$ et $b = 0$, c'est-à-dire si A est déjà diagonale.

Sinon, $\Delta > 0$, et il y a deux racines distinctes réelles x_1 et x_2, donc A est toujours diagonalisable.

Problème 2 : puissance de matrice

M_3 désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.

On considère la matrice A de M_3 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que A est diagonalisable, écrire la matrice diagonale D.

Le polynôme caractéristique est $P(x) = (1 - x)^2(2 - x)$

1 est racine double, 2 est simple.

2) Déterminer les sous-espaces propres associés aux valeurs propres.

En déduire une base de vecteurs propres et donner la matrice de passage P.

Sous-espace E(1) associé à la vp 1 :

$x = x$

$y = y$

$x - y + z = 0$

$\Rightarrow$ E(1) est un plan dont les vecteurs (1, 1, 0) et (0, 1, 1) forment une base.

Sous-espace E(2) associé à la vp 2 :

$x = 2x$

$y = 2y$

$x - y + 2z = 2z$

$\Rightarrow$ E(2) est une droite dont le vecteur (0, 0, 1) est une base

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3) n étant un entier naturel non nul, donner l'expression explicite de A^n.

On sait que $P^{-1}AP = D$, $P^{-1}A^nP = D^n$, et donc $A^n = PD^nP^{-1}$
On calcule aisément P^{-1}

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Par le calcul : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^n - 1 & 1 - 2^n & 2^n \end{pmatrix}$

Problème 3 : suites

M_2 désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2, à coefficient réels. I_2 est la matrice identité de M_2.

On définit la suite (u_n), $n \in \mathbb{N}$, par la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{u_{n-1}}{2}$ avec des valeurs initiales $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$.

1 – Déterminer une matrice A de M_2 telle que, pour tout entier $n \geq 1$, on ait :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$$

Soit $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Posons $v_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$. On a $v_{n+1} = A.v_n$, $n \geq 1$; et donc $v_{n+1} = A^n.v_1$

2 – Déterminer le polynôme caractéristique P(x) de A. Diagonaliser la matrice A.

$P(x) = x^2 - x/2 - 1/2$
Deux racines : $x_1 = 1$ et $x_2 = -1/2$

$\mathrm{Diag}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$

3 – Soit $R_n(x)$ le reste de la division euclidienne de x^n par P(x), $n \geq 2$.
Montrer que $R_n(x) = a_nx + b_n$ où a_n et b_n sont des nombres réels dont on donnera l'expression en fonction de n.

On a $x^n = P(x).Q_n(x) + R_n(x)$, Q_n étant le polynôme quotient
Comme P(x) est de degré 2, $R_n(x)$ est de degré 1 : $R_n(x) = a_nx + b_n$

$(x_1)^n = 1 = a_n + b_n$
$(x_2)^n = (-1/2)^n = -a_n/2 + b_n$

On en déduit :
$a_n = 2[1 – (-1/2)^n]/3 = 2/3 – 2(-1/2)^n)/3$
$b_n = 1/3 + 2(-1/2)^n)/3$

4a – Pour tout $n \geq 2$, montrer que $A^n = a_nA + b_nI_2$.

Par récurrence :
$A^2 = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$
On trouve facilement $a_2 = ½$ et $b_2 = ½$
Vrai pour n = 2
Supposons la relation vraie au rang n.
$A^n = a_nA + b_nI_2 \Rightarrow A^{n+1} = a_nA^2 + b_nA = a_n(A/2 + I_2/2) + b_nA = A(a_n/2 + b_n) + (a_n/2)I_2$

Reste à vérifier que $a_{n+1} = (a_n/2 + b_n)$ et $b_{n+1} = a_n/2$.

- $a_n/2 = 1/3 – 1(-1/2)^n)/3 = 1/3 + 2(-1/2)^{n+1}/3 = b_{n+1}$
- $(a_n/2 + b_n) = 2/3 + (-1/2)^n)/3 = 2/3 - 2(-1/2)^{n+1})/3 = a_{n+1}$

La relation est donc vérifiée pour tout $n \geq 2$.

4b – En déduire que la matrice A^n converge, quand n tend vers $+\infty$, vers une limite A^* à déterminer.

$A^n = \begin{pmatrix} \frac{a_n}{2} + b_n & \frac{a_n}{2} \\ a_n & b_n \end{pmatrix}$

$(a_n/2 + b_n) = 2/3 + (-1/2)^n)/3$

Quand $n \rightarrow +\infty$:
$a_n/2 \rightarrow 1/3$
$b_n \rightarrow 1/3$
$(a_n/2 + b_n) \rightarrow 2/3$

$A^* = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

4c – Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

D'après la question 1, $v_{n+1} = A^n.v_1$; d'où $u_{n+1} = a_n/2 + b_n = 2/3 + (-1/2)^n)/3$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2/3$

Problème 4 : matrice à diagonale dominante

M_n désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels positifs, non tous nuls.
Pour toute matrice A de M_n, de coefficients (a_{ij}), $1 \leq i, j \leq n$, on notera par c_j, j = 1 à n, la $j^{\text{ième}}$ colonne de coefficients (a_{ij}), $1 \leq i \leq n$.
On s'intéresse aux matrices de M_n vérifiant, pour tout i = 1 à n, l'ensemble (H) d'inégalités :

$$(H) \quad a_{ii} > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}$$

De telles matrices vérifiant (H) sont appelées *matrices à diagonale dominante.*

1 – Soit A une matrice de M_2, vérifiant les inégalités (H). Montrer que A est inversible.

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; d'après (H), on a : a > b et d > c.
Le déterminant de A est Dét(A) = ad - bc ; on a donc Dét(A) > 0.
A est inversible.

2 – Passons au cas général, et considérons une matrice A de M_n vérifiant les inégalités (H). On désigne par B, de coefficients b_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$, la matrice obtenue à partir de la matrice A en remplaçant, pour tout $j \geq 2$, la colonne c_j de A par une nouvelle colonne définie par $c_j - \frac{a_{1j}}{a_{11}}.\, c_1$

$$c_j \to c_j - \frac{a_{1j}}{a_{11}}.c_1$$

2a – Montrer que a_{11} est strictement positif.

Puisque $a_{11} > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{1j}$ et que tous les a_{1j} sont ≥ 0, $a_{11} > 0$

2b – Calculer les coefficients b_{ij} en fonction des a_{ij}. Que valent les coefficients b_{1j}, pour j = 1 à n ?

On a, pour le cas général : $b_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{1j}}{a_{11}}.a_{i1}$, pour $j \neq 1$.
Bien sûr, par construction, la première colonne de B est identique à celle de A, et donc $b_{i1} = a_{i1}$ pour tout i = 1 à n, et bien sûr $b_{11} = a_{11}$.
Et on remarque que $b_{1j} = 0$ pour tout $j \geq 2$.

2c – Montrer que les coefficients de B vérifient les inégalités H* :

$$(\text{H*}) \quad \forall\, i \geq 2,\ b_{ii} > \sum_{j=2, j\neq i}^{n} b_{ij}$$

On note que $b_{ii} = a_{ii} - \frac{a_{1i}}{a_{11}}.a_{i1}$
$\sum_{j=2, j\neq i}^{n} b_{ij} = \sum_{j=2, j\neq i}^{n} (a_{ij} - \frac{a_{1j}}{a_{11}}.\, a_{i1}) = \sum_{j=2, j\neq i}^{n} a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} \sum_{j=2, j\neq i}^{n} a_{1j}$
Comme tous les coefficients sont positifs ou nuls, on a la majoration suivante :
$\sum_{j=2, j\neq i}^{n} b_{ij} < (\sum_{j=2, j\neq i}^{n} a_{ij}) + (\frac{a_{i1}}{a_{11}} \sum_{j=2, j\neq i}^{n} a_{1j}) = G + kH$ avec $k = a_{i1}/a_{11}$

De façon évidente, on a : $G = \sum_{j=2, j\neq i}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij} - a_{i1} < a_{ii} - a_{i1}$

De même, $H = \sum_{j=2, j\neq i}^{n} a_{1j} = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{1j} - a_{1i}$ qui est $< a_{11} - a_{1i}$
On obtient donc :
$\sum_{j=2, j\neq i}^{n} b_{ij} < a_{ii} - a_{i1} + (a_{11} - a_{1i})\, a_{i1}/a_{11} = a_{ii} - a_{i1} + a_{i1} - a_{1i}.a_{i1}/a_{11} = a_{ii} - a_{1i}.a_{i1}/a_{11} = b_{ii}$

Soit $\sum_{j=2, j\neq i}^{n} b_{ij} < b_{ii}$

3 – Soit A une matrice de M_n vérifiant H. Montrer qu'elle est inversible.

Par récurrence.

- Le résultat est vrai pour n = 2 (question 1)
- Supposons la propriété vérifiée au rang n-1.

En procédant aux changements de colonnes indiqués à la question 2, Dét(A) = a_{11} Dét(B) où la matrice B est celle de la Q2 :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \ldots\ldots & 0 & 0 \\ a_{12} & & & \\ & & B & \\ a_{1n} & & & \end{pmatrix}$$

Or B est une matrice carrée d'ordre n-1 qui vérifie les hypothèses H, donc inversible d'après l'hypothèse de récurrence vraie au rang n-1.
Donc A est inversible puisque $a_{11} > 0$ (question 2a).