ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2017

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

D'après Juliana Rotich, professionnelle des technologies informatiques, *« les nouvelles technologies ont un rôle crucial dans le développement du continent africain »*. Qu'en pensez-vous ?

Sujet n° 2

Les droits humains sont-ils universels ?

Sujet n° 3

L'éducation des filles est-elle un facteur de lutte contre la pauvreté ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2017

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

L'épreuve comporte deux exercices et un problème indépendants, à traiter dans un ordre quelconque.

Exercice n° 1

Soit un entier n strictement positif.
On note $(d_1, d_2, \ldots, d_k)$ les k diviseurs de n, indicés en sens strictement croissant, avec $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_{k-1} < d_k = n$.
1. On donne n = 6.
Quelles sont les valeurs des 4 diviseurs (d_1, d_2, d_3, d_4) de 6.
Montrer que $\left(\prod_{j=1}^{4} d_j\right)^2 = 6^4$

2. On se place dans le cas général.
Démontrer la relation suivante :

$$\left(\prod_{j=1}^{k} d_j\right)^2 = n^k$$

Exercice n° 2

Rappel : soient 2 événements A et B, de probabilités P(A) et P(B) non nulles.
On rappelle que la probabilité de A conditionnellement à B, notée P(A/B) est donnée par :

$$P(A/B) = P(A \cap B)/P(B) = P(B / A).P(A)/P(B)$$

Dans un pays imaginaire, on sait a priori que 3 % des automobilistes du pays conduisent en état d'ébriété. Le gouvernement lance une campagne de lutte contre l'alcool au volant.
À cet effet, la gendarmerie est équipée d'un alcootest dont les performances sont les suivantes :
- Dans 2 % des cas, l'alcootest est positif à tort (la personne contrôlée n'est pas en état d'ébriété)

- Dans 96 % des cas, l'alcootest est positif à juste titre (la personne contrôlée est effectivement en état d'ébriété)
1. Calculer la probabilité que l'alcootest soit positif.
2. Calculer la probabilité qu'un conducteur ne soit pas en état d'ébriété alors que son alcootest a été positif.
Quelle conclusion en tirez-vous ?

Problème

Soient n et p deux nombres entiers naturels strictement positifs.
On considère la famille G(n, p), dépendant des paramètres n et p, des fonctions $g_{n,p}$ définies sur $[0, +\infty[$ par :

$x \to g_{n,p}(x) = (x^n)e^{(-x^p)}$

Partie I
Dans cette première partie, on prend n = 1 et p = 2.
Pour simplifier, on notera par g la fonction $g_{1,2}$: $g_{1,2}(x) = x\, e^{-x^2}$.

I-1. Calculer g' et g'', dérivées première et seconde de g, et étudier leur signe.

I-2. Étudier très précisément les variations de g (limites, asymptotes, points caractéristiques et pentes en ces points, convexité, …). Étudier la position de G, graphe de g, par rapport à la première bissectrice d'équation y = x. Donner le tableau de variation de g.

I-3. Donner la forme du graphe G de g.

I-4. On définit l'intégrale $L_1 = \int_0^{+\infty} g(x)dx$.
Calculer L_1.

Partie II
Dans cette deuxième partie, on prend n = 3 et p = 2.
On notera par g_3 la fonction $g_{3,2}$: $g_{3,2}(x) = x^3e^{-x^2}$.

II-1. Étudier très précisément les variations de g_3 : limites, asymptotes, étude des dérivées première et seconde, points d'inflexion, points caractéristiques, convexité, … Dresser le tableau de variation de g_3.

II-2. Donner la forme du graphe G_3 de g.

II-3. Étudier l'intersection de G et G_3.

II-4. On définit l'intégrale $L_3 = \int_0^{+\infty} g_3(x)dx$
Calculer L_3.

Partie III
Dans cette troisième partie, on prend p = 2, et n est un entier quelconque strictement positif.
On notera par g_n la fonction $g_{n,2}$: $g_{n,2}(x) = x^ne^{-x^2}$.

III-1. Montrer que g_n passe par un maximum pour un point d'abscisse α(n) que l'on déterminera.

III-2. On pose $u(n) = g_n(\alpha(n))$.
Calculer $u(n)$.
Montrer que la suite $\{u(n)\}$, $n \geq 3$, est croissante.

III-3. On définit l'intégrale $L(n) = \int_0^{+\infty} g_n(x)dx$.
Trouver une relation de récurrence entre $L(n)$ et $L(n-2)$.

Partie IV
On considère dans cette partie le cas général $g_{n,p}(x) = x^n e^{-x^p}$.

IV-1. Donner l'expression de $g'_{n,p}$, dérivée première de $g_{n,p}$.
Étudier les racines éventuelles de l'équation $g'_{n,p}(x) = 0$ et en déduire le signe de $g'_{n,p}$.

IV-2. Donner l'expression de $g''_{n,p}$, dérivée seconde de $g_{n,p}$. Étudier son signe et en déduire la concavité de $g_{n,p}$.

IV-3. En déduire les variations de $g_{n,p}$. Étudier ses points particuliers, et donner la forme générale de son graphe $G_{n,p}$.

IV-4. Montrer que toutes les courbes $\{G_{n,p}\}$ passent par un point fixe A ; donner les coordonnées de A ainsi que l'équation de la tangente en A à $G_{n,p}$.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2017

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

ÉCONOMIE

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des deux sujets suivants

Sujet 1

Après avoir rappelé l'importance et le rôle des incertitudes et des anticipations dans les théories économiques, vous vous interrogerez sur les conditions et les conséquences pour la politique monétaire et la conjoncture de la déclaration du Président de la BCE, Mario DRAGHI en novembre 2016 : *« Adopter une position attentiste du fait du choc du prix du pétrole et laisser l'inflation faible s'installer pourraient éroder les anticipations à long terme et la confiance dans la banque centrale et conduire à des pressions continuellement baissières sur les prix ».*

Sujet 2

30 ans après la publication du rapport BRUNDTLAND (1), vous vous interrogerez sur les enjeux, les instruments et les limites d'une croissance soutenable et d'un développement durable aujourd'hui.

(1) Le **rapport BRUNDTLAND** est le nom communément donné à une publication, officiellement intitulée ***Notre avenir à tous*** (*Our Common Future*), rédigée en 1987 par la Commission mondiale sur l'environnement et le développement de l'Organisation des Nations Unies.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2017

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

***L'épreuve est composée de quatre problèmes indépendants, portant tous sur les matrices. Ils sont à traiter dans un ordre quelconque*.**

Problème 1 : diagonalisation

M_2 désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2, à coefficient réels.

Soit A une matrice de M_2 : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$.

Montrer que A est diagonalisable dans R, ensemble des nombres réels.

Problème 2 : puissance de matrice

M_3 désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.

On considère la matrice A de M_3 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que A est diagonalisable, écrire la matrice diagonale D semblable à A.

2) Déterminer les sous-espaces propres associés aux valeurs propres.
En déduire une base de vecteurs propres et donner la matrice de passage P.

3) n étant un entier naturel non nul, donner l'expression explicite de A^n.

Problème 3 : suites

M_2 désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2, à coefficient réels. I_2 est la matrice identité de M_2.

On définit la suite (u_n), $n \in N$, par la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{u_{n-1}}{2}$ avec les valeurs initiales $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$.

1 – Déterminer une matrice A de M_2 telle que, pour tout entier $n \geq 1$, on ait :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$$

2 – Déterminer le polynôme caractéristique $P(x)$ de A. Diagonaliser la matrice A.

3 – Soit $R_n(x)$ le reste de la division euclidienne de x^n par $P(x)$, $n \geq 2$.
Montrer que $R_n(x) = a_n x + b_n$ où a_n et b_n sont des nombres réels dont on donnera l'expression en fonction de n.

4a – Pour tout $n \geq 2$, montrer que $A^n = a_n A + b_n I_2$.

4b – En déduire que la matrice A^n converge quand n tend vers $+\infty$ vers une limite A^* à déterminer.

4c – Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Problème 4 : matrice à diagonale dominante

M_n désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels positifs, non tous nuls.
Pour toute matrice A de M_n, de coefficients (a_{ij}), $1 \leq i, j \leq n$, on notera par c_j, $j = 1$ à n, la $j^{\text{ième}}$ colonne de coefficients (a_{ij}), $1 \leq i \leq n$.
On s'intéresse aux matrices de M_n vérifiant, pour tout $i = 1$ à n, l'ensemble (H) d'inégalités :

$$\text{(H)} \quad a_{ii} > \sum_{j=1, j \neq i}^{n} a_{ij}$$

De telles matrices vérifiant (H) sont appelées *matrices à diagonale dominante.*

1 – Soit A une matrice de M_2, vérifiant les inégalités (H). Montrer que A est inversible.

2 – Passons au cas général, et considérons une matrice A de M_n vérifiant les inégalités (H).
On désigne par B, de coefficients b_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$, la matrice obtenue à partir de la matrice A en remplaçant, pour tout $j \geq 2$, la colonne c_j de A par une nouvelle colonne définie par $c_j - \frac{a_{1j}}{a_{11}}.\, c_1$

$$c_j \rightarrow c_j - \frac{a_{1j}}{a_{11}}.c_1$$

2a – Montrer que a_{11} est strictement positif.

2b – Calculer les coefficients b_{ij} en fonction des a_{ij}. Que valent les coefficients b_{1j}, pour $j = 1$ à n ?

2c – Montrer que les coefficients de B vérifient les inégalités H* :

$$\text{(H*)} \quad \forall\, i \geq 2,\ b_{ii} > \sum_{j=2, j \neq i}^{n} b_{ij}$$

3 – Soit A une matrice de M_n vérifiant H. Montrer qu'elle est inversible.