

AVRIL 2015

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

Corrigé de la 1^{ère} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Le sujet est constitué d'un problème d'analyse et d'un problème d'algèbre linéaire indépendants. Tout résultat donné dans l'énoncé pourra être admis dans les questions suivantes. Le plus grand soin sera apporté à la rédaction et à la présentation des résultats.

Notations : on note \mathbb{N} l'ensemble des entiers naturels et \mathbb{R} le corps des nombres réels. Pour $m \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}[X]$ l'espace des fonctions polynômes à coefficients réels et $\mathbb{R}_m[X]$ le sous-espace de $\mathbb{R}[X]$ des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à m . On identifie les polynômes avec les fonctions polynômes associées. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ ($a < b$), on note $\mathcal{C}([a, b])$ l'ensemble des fonctions réelles continues définies sur l'intervalle $[a, b]$.

1 Problème d'analyse

Le but du problème est d'étudier des méthodes classiques d'intégration numérique afin de proposer des approximations de la valeur de certaines intégrales.

On définit I l'opérateur d'intégration sur $\mathcal{C}([a, b])$ de la manière suivante :

$$I : \begin{array}{ll} \mathcal{C}([a, b]) & \rightarrow \mathbb{R} \\ f & \mapsto \int_a^b f(x) dx. \end{array}$$

1.1 Préliminaires

1. Montrer que pour tout $f \in \mathcal{C}([a, b])$, on a $I(f) \leq (b - a) \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$.

$$I(f) \leq |I(f)| \leq I(|f|) \leq I(\sup_{x \in [a, b]} |f(x)|) = (b - a) \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

2. Montrer que pour tout $f \in \mathcal{C}([a, b])$ positive, on a $I(f) \geq (b - a) \inf_{x \in [a, b]} f(x)$.

$$I(f) = I(|f|) \geq I(\inf_{x \in [a, b]} |f(x)|) = (b - a) \inf_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

3. Montrer que I est un opérateur linéaire, c'est-à-dire que

$$\text{Pour tout } \lambda \in \mathbb{R}, \text{ et pour tout } f, g \in \mathcal{C}([a, b]), \quad \lambda I(f) + I(g) = I(\lambda f + g).$$

$$\text{Par linéarité de l'intégrale on a bien } \lambda I(f) + I(g) = \lambda \int f + \int g = \int \lambda f + g = I(\lambda f + g).$$

4. Dans le cas où $0 < a < b < 1$, calculer $I(\sqrt{1-x^2})$.

Un changement de variable $x = \cos \theta$ donne $I(\sqrt{1-x^2}) = - \int_{\arccos(a)}^{\arccos(b)} |\sin(\theta)| \sin(\theta) d\theta$. Le

sinus étant positif sur l'intervalle d'intégration, on a $I(\sqrt{1-x^2}) = \int_{\arccos(b)}^{\arccos(a)} \sin^2(\theta) d\theta =$

$\int_{\arccos(b)}^{\arccos(a)} \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} d\theta = \left[\frac{2\theta - \sin(2\theta)}{4} \right]_{\arccos(b)}^{\arccos(a)}$. Inutile de développer beaucoup plus. On

peut aussi utiliser $\sin(2 \arccos(x)) = 2x\sqrt{1-x^2}$.

5. En déduire la valeur de $4 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$.

On a $\arccos(a) = \pi/2$ et $\arccos(b) = 0$ d'où $4 \left[\frac{2\theta - \sin(2\theta)}{4} \right]_0^{\pi/2} = \pi - \sin(\pi) - 0 + \sin(0) = \pi$.

1.2 Formules de quadrature

On se fixe un entier $n \geq 1$. Soit $(x_i)_{i=1, \dots, n}$ une suite de n points de l'intervalle $[a, b]$ tels que $a \leq x_1 < \dots < x_n \leq b$. Soit également $(w_i)_{i=1, \dots, n}$ une famille de n réels positifs. On note $Q(f)$ le réel tel que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}([a, b])$

$$Q(f) = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i).$$

On parle alors d'une formule de quadrature "à n points".

6. Montrer que Q est un opérateur linéaire, c'est-à-dire que

$$\text{Pour tout } \lambda \in \mathbb{R}, \text{ et pour tout } f, g \in \mathcal{C}([a, b]), \quad \lambda Q(f) + Q(g) = Q(\lambda f + g).$$

$$\lambda Q(f) + Q(g) = \lambda \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) + \sum_{i=1}^n w_i g(x_i) = \sum_{i=1}^n w_i (\lambda f(x_i) + g(x_i)) = Q(\lambda f + g).$$

7. Montrer que $|Q(f)| \leq \left(\sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \right) \sum_{i=1}^n w_i$.

$$|Q(f)| \leq \sum_{i=1}^n |w_i f(x_i)| \leq \left(\sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \right) \sum_{i=1}^n w_i \text{ car les } w_i \text{ sont positifs.}$$

8. Montrer que $|Q(f)| \leq n \left(\sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \right) \left(\sup_{i=1, \dots, n} w_i \right)$.

$$|Q(f)| \leq \left(\sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \right) \sum_{i=1}^n w_i \leq \left(\sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \right) \left(\sup_{i=1, \dots, n} w_i \right) \sum_{i=1}^n 1.$$

9. Montrer que pour toute fonction positive croissante

$$\sum_{i=1}^{n-1} w_i f(x_i) \leq \left(\sup_{i=1, \dots, n-1} \frac{w_i}{x_{i+1} - x_i} \right) I(f).$$

Tout est positif donc on se passe des valeurs absolues

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} w_i f(x_i) &\leq \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{w_i}{x_{i+1} - x_i} \right) (x_{i+1} - x_i) f(x_i) \\ \text{on majore par le sup} &\leq \sup_{i=1, \dots, n-1} \left(\frac{w_i}{x_{i+1} - x_i} \right) \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(x_i) \\ \text{on intègre une constante} &\leq \sup_{i=1, \dots, n-1} \left(\frac{w_i}{x_{i+1} - x_i} \right) \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \\ f \text{ est croissante} &\leq \sup_{i=1, \dots, n-1} \left(\frac{w_i}{x_{i+1} - x_i} \right) \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \\ \text{on rassemble} &\leq \sup_{i=1, \dots, n-1} \left(\frac{w_i}{x_{i+1} - x_i} \right) \int_{x_1}^{x_n} f(x) dx \\ f \text{ est positive} &\leq \sup_{i=1, \dots, n-1} \left(\frac{w_i}{x_{i+1} - x_i} \right) I(f) \end{aligned}$$

10. Montrer que pour toute fonction positive décroissante

$$\sum_{i=2}^n w_i f(x_i) \leq \left(\sup_{i=2, \dots, n} \frac{w_i}{x_i - x_{i-1}} \right) I(f).$$

Tout est positif donc on se passe des valeurs absolues

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^n w_i f(x_i) &\leq \sum_{i=2}^n \left(\frac{w_i}{x_i - x_{i-1}} \right) (x_i - x_{i-1}) f(x_i) \\ \text{on majore par le sup} &\leq \sup_{i=2, \dots, n} \left(\frac{w_i}{x_i - x_{i-1}} \right) \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i-1}) f(x_i) \\ \text{on intègre une constante} &\leq \sup_{i=2, \dots, n} \left(\frac{w_i}{x_i - x_{i-1}} \right) \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \\ f \text{ est décroissante} &\leq \sup_{i=2, \dots, n} \left(\frac{w_i}{x_i - x_{i-1}} \right) \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \\ \text{on rassemble} &\leq \sup_{i=2, \dots, n} \left(\frac{w_i}{x_i - x_{i-1}} \right) \int_{x_0}^{x_{n-1}} f(x) dx \\ f \text{ est positive} &\leq \sup_{i=2, \dots, n} \left(\frac{w_i}{x_i - x_{i-1}} \right) I(f) \end{aligned}$$

1.3 Polynômes d'interpolation

Lorsque $Q(p) = I(p)$ pour tous les polynômes $p \in \mathbb{R}_m[X]$ alors on dit que l'opérateur Q "intègre exactement les polynômes d'ordre m ".

11. Proposer un opérateur de quadrature (noté Q_1) "à 1 points" qui intègre exactement les polynômes d'ordre 0 (les constantes).

$Q_1(f) = (b-a)f(a)$ par exemple, ou encore $Q_1(f) = (b-a)f(b)$.

On note $p_n[f]$ le polynôme d'interpolation de la fonction $f \in \mathcal{C}([a, b])$ tel que

$$p_n[f] : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sum_{i=1}^n f(x_i)L_i(x),$$

où L_i est le i -ème polynôme de Lagrange associé à la famille $(x_i)_{i=1, \dots, n}$, c'est-à-dire

$$L_i(x) = \frac{\prod_{j \neq i, j=1}^n (x - x_j)}{\prod_{j \neq i, j=1}^n (x_i - x_j)}$$

12. Montrer que $p_n[f](x_i) = f(x_i)$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

Pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$, on a $L_j(x_i) = \delta_{i,j}$ donc $p_n[f](x_i) = \sum_{j=1}^n f(x_j)L_j(x_i) = \sum_{j=1}^n f(x_j)\delta_{i,j} = f(x_i)$.

13. Lorsque $w_i = I(L_i)$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, montrer que $I(p_n[f]) = Q(f)$.

Par linéarité $I(p_n[f]) = \sum_{i=1}^n f(x_i)I(L_i) = \sum_{i=1}^n f(x_i)w_i = Q(f)$.

On pose F la fonction

$$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto f(t)(b-a) - \int_a^b f(x)dx$$

14. Montrer que F s'annule au moins une fois sur $[a, b]$.

f est continue donc elle admet un minimum au point x_m et un maximum au point x_M d'où $F(x_m) = f(x_m)(b-a) - \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b (f(x_m) - f(x))dx \leq 0$. De même $F(x_M) = f(x_M)(b-a) - \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b (f(x_M) - f(x))dx \geq 0$. Donc F change de signe sur $[a, b]$ donc elle s'y annule.

15. En déduire que tout opérateur Q "à 1 point" qui intègre exactement les constantes vérifie $|Q(f) - I(f)| \leq (b-a)^2 \sup_{x \in [a, b]} |f'(x)|$ dès que f est dérivable.

On pose ξ_0 un point où F s'annule. Il existe $\xi \in [a, b]$ tel que $|Q(f) - I(f)| = |(b-a)f(\xi) - I(f)| = |(b-a)f(\xi) - (b-a)f(\xi_0)| \leq (b-a)|\xi - \xi_0| \sup_{x \in [a, b]} |f'(x)| \leq (b-a)^2 \sup_{x \in [a, b]} |f'(x)|$.

16. Proposer un opérateur de quadrature (noté Q_2) "à 2 points" qui intègre exactement les polynômes d'ordre 0 et 1 (les fonctions affines).

On pose $Q_2(f) = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))$ alors $Q_2(1) = \frac{b-a}{2}(1+1) = I(1)$ et $Q_2(x) = \frac{b-a}{2}(a+b) = \frac{b^2-a^2}{2} = \int_a^b x dx = I(x)$.

17. Proposer un opérateur de quadrature (noté Q_3) “à 3 points” avec $x_1 = a$, $x_2 = \frac{a+b}{2}$ et $x_3 = b$ qui intègre exactement les polynômes d’ordre 0, 1 et 2.

On pose $Q_3(f) = \frac{b-a}{6}(f(x_1) + 4f(x_2) + f(x_3))$ alors $Q_3(1) = \frac{b-a}{6}(1+4+1) = I(1)$,
 $Q_3(x) = \frac{b-a}{6}(a+2a+2b+b) = \frac{b^2-a^2}{2} = \int_a^b x dx = I(x)$ et $Q_3(x^2) = \frac{b-a}{6}(a^2+(a+b)^2+b^2) = \frac{b-a}{3}(a^2+b^2+ab) = \frac{b^3-a^3}{3} = \int_a^b x^2 dx = I(x)$.

1.4 Estimation d’erreur

Dans cette partie on suppose que $x_1 = a < x_2 < \dots < x_{n-1} < b = x_n$ et on définit :

Q_n^{gauche} l’opérateur “à n points à gauche” tel que $Q_n^{gauche}(f) = \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(x_i)$, et

Q_n^{droite} l’opérateur “à n points à droite” tel que $Q_n^{droite}(f) = \sum_{i=2}^n (x_i - x_{i-1}) f(x_i)$.

18. Donner les familles $(w_i^{gauche})_{i=1,\dots,n}$ et $(w_i^{droite})_{i=1,\dots,n}$ associées à ces deux opérateurs.

$w_i^{gauche} = (x_{i+1} - x_i)$ pour $i < n$ et $w_n^{gauche} = 0$. $w_i^{droite} = (x_i - x_{i-1})$ pour $i > 1$ et $w_1^{droite} = 0$

19. Montrer que les deux opérateurs Q_n^{gauche} et Q_n^{droite} “à n points” vérifient

$$\max \left\{ \left| Q_n^{gauche}(f) - I(f) \right|, \left| Q_n^{droite}(f) - I(f) \right| \right\} \leq \frac{(b-a)^2}{2} \sup_{x \in [a,b]} |f'(x)|$$

On ne le fait que pour un.

$$\begin{aligned}
\left| Q_n^{gauche}(f) - I(f) \right| &= \left| \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(x_i) - \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \right| \\
&= \left| \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f(x_i) - f(x)) dx \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(x_i) - f(x)| dx \\
&\leq \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sup_{x \in [a,b]} |f'(x)| (x - x_i) dx \\
&\leq \sup_{x \in [a,b]} |f'(x)| \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i) dx \\
&\leq \sup_{x \in [a,b]} |f'(x)| \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2} \\
&\leq \sup_{x \in [a,b]} |f'(x)| \frac{(b-a)}{2} \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \leq \sup_{x \in [a,b]} |f'(x)| \frac{(b-a)^2}{2}
\end{aligned}$$

20. Trouver un entier $n \geq 2$ et un couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que l'opérateur $Q = \alpha Q_n^{gauche} + \beta Q_n^{droite}$
- soit un opérateur "à n points" (préciser les familles $(x_i)_{i=1, \dots, n}$ et $(w_i)_{i=1, \dots, n}$ associées),
 - intègre exactement les polynômes d'ordre 0 et 1
 - vérifie $|Q(f) - I(f)| \leq \frac{(b-a)^2}{2} \sup_{x \in [a,b]} |f'(x)|$.

Il suffit de prendre $\alpha = \beta = 1/2$. En effet Q reste un opérateur "à n points", tel que $|Q(f) - I(f)| = \frac{1}{2} |Q_n^{gauche} + Q_n^{droite} - 2I(f)| \leq \frac{1}{2} (|Q_n^{gauche} - I(f)| + |Q_n^{droite} - I(f)|)$ vérifie

donc bien l'inégalité voulue. De plus $2Q(1) = \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) + \sum_{i=2}^n (x_i - x_{i-1}) = x_n - x_1 +$

$x_n - x_1 = 2(b-a)$. Et $2Q(x) = \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)x_i + \sum_{i=2}^n (x_i - x_{i-1})x_i = \sum_{i=1}^{n-1} x_{i+1}x_i - \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 +$

$\sum_{i=2}^n x_i^2 - \sum_{i=2}^n x_i x_{i-1} = \sum_{i=2}^n x_i x_{i-1} - a^2 + b^2 - \sum_{i=2}^n x_i x_{i-1} = b^2 - a^2$.

2 Problème d'algèbre

Le but du problème d'algèbre est d'étudier différentes méthodes d'approximation d'un nuage de point, il traite d'interpolation polynômiale, de moindres carrés et de régression linéaire.

Pour cela, on se fixe un entier $n \geq 1$ et deux familles $(x_i)_{i=1,\dots,n}$ et $(y_i)_{i=1,\dots,n}$ qui représentent les coordonnées $(x_i, y_i)_{i=1,\dots,n}$ d'un nuage de points dans \mathbb{R}^2 . On suppose que les x_i sont tous différents, ce sont les abscisses des points du nuage. On ne suppose rien sur les y_i , ce sont les ordonnées des points du nuage.

2.1 Approximation polynômiale

On dit qu'un polynôme $p \in \mathbb{R}_m[X]$ approche k points du nuage lorsque $p(x_i) = y_i$ pour une famille d'au moins k indices i dans $\{1, \dots, n\}$.

1. On cherche un polynôme qui approche 2 points du nuage. Donner la forme du polynôme dans $\mathbb{R}_1[X]$ qui approche le nuage $(x_1, y_1; x_2, y_2)$.

C'est la droite affine $x \mapsto \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}(y_1 - y_2) + y_2$.

2. On cherche un polynôme qui approche 3 points du nuage. Donner la forme du polynôme dans $\mathbb{R}_2[X]$ qui approche le nuage $(0, y_1; 1, y_2; 2, y_3)$.

Il faut résoudre $c = y_1$, $a + b + c = y_2$ et $4a + 2b + c = y_3$. D'où $a = y_3/2 - y_2 + y_1/2$ et $b = 2y_2 - y_3/2 - 3y_1/2$ et $x \mapsto y_1 + (2y_2 - y_3/2 - 3y_1/2)x + (y_3/2 - y_2 + y_1/2)x^2$ est le polynôme recherché.

3. On cherche un polynôme qui approche n points du nuage sous la forme

$$P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_{n-1}X^{n-1}.$$

Montrer que $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ est solution d'un système linéaire à n équations et n inconnues.

Les équations s'écrivent $\sum_{i=0}^{n-1} a_i x_j^i - y_j = 0$ pour $j \in \{1, \dots, n\}$.

4. On pose M la matrice de ce système linéaire. Montrer que M peut s'écrire sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_i & \dots & x_i^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

C'est simplement la réécriture sous forme matricielle.

5. Calculer le déterminant de cette matrice M .

C'est un Vandermonde $\prod_{i \neq j} (x_i - x_j)$.

6. En déduire que le système admet une unique solution.

Les x_i étant tous distincts, le déterminant est non nul donc la matrice est inversible, d'où l'unicité de la solution.

7. Soit un entier $j \in \{1, \dots, n\}$. Donner la formule exacte du polynôme L_j qui approche un nuage de points d'abscisses $(x_i)_{i=1, \dots, n}$ et d'ordonnées $(y_i)_{i=1, \dots, n}$ telles que $y_j = 1$ et $y_i = 0$ si $i \neq j$.

C'est le polynôme d'interpolation de Lagrange, il s'écrit $\prod_{i \neq j} (x - x_i) / \prod_{i \neq j} (x_i - x_j)$.

8. En déduire une formule équivalente pour le polynôme P de la question 3. qui fait intervenir les L_j pour $j \in \{1, \dots, n\}$.

Il est clair que $P(x) = \sum_{j=1}^n y_j L_j(x)$.

2.2 Projection orthogonale

On pose $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la forme bilinéaire sur $\mathcal{C}([a, b])$ telle que

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx \text{ pour toutes fonctions } f, g \in \mathcal{C}([a, b]).$$

On pose f une fonction continue sur $[a, b]$ telle que $f(x_i) = y_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. On cherche à montrer qu'il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}_{m-1}[X]$ tel que

$$\langle f - Q, f - Q \rangle = \inf_{P \in \mathbb{P}_{m-1}} \langle f - P, f - P \rangle$$

On parlera de la solution du problème de projection orthogonale.

9. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}([a, b])$.

Linéaire, positif et défini.

10. En déduire que $\sqrt{\langle f, f \rangle}$ définit une norme sur $\mathcal{C}([a, b])$ notée $\|f\|$.

Cours.

11. Supposons que Q soit une solution du problème de projection orthogonale. On pose \tilde{Q} un autre polynôme de $\mathbb{R}_{m-1}[X]$. Montrer que

$$\|f - Q - t\tilde{Q}\|^2 - \|f - Q\|^2 \geq 0,$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

$Q - t\tilde{Q}$ est un polynôme de $\mathbb{R}_{m-1}[X]$ donc $\|f - Q - t\tilde{Q}\|$ est plus grand que $\|f - Q\|$ qui réalise le minimum sur $\mathbb{R}_{m-1}[X]$.

12. En déduire que $\langle f - Q, \tilde{Q} \rangle = 0$.

$0 \leq \|f - Q - t\tilde{Q}\|^2 - \|f - Q\|^2 = -2t\langle f - Q, \tilde{Q} \rangle + t^2\|\tilde{Q}\|^2$. Ceci étant vrai pour tout $t \in \mathbb{R}$, cela impose que $\langle f - Q, \tilde{Q} \rangle = 0$.

13. Conclure sur l'unicité du polynôme solution du problème de projection orthogonale.

Si \hat{Q} est une autre solution alors en appliquant le résultat précédent à $\tilde{Q} = \hat{Q} - Q$, on a $\|f - \hat{Q}\|^2 = \|f - Q - (\hat{Q} - Q)\|^2 = \|f - Q\|^2 + \|\hat{Q} - Q\|^2 = \|f - Q\|^2$ car ils réalisent tous les deux le minimum. Donc $\|\hat{Q} - Q\| = 0$.

14. Montrer que $\langle f, X^j \rangle = \langle Q, X^j \rangle$ pour tous les monômes X^j pour $j \leq m - 1$.

On a $\langle f - Q, X^j \rangle = 0$ en appliquant à $\tilde{Q} = X^j$.

15. Lorsque $n = m$, et en notant $Q = a_0 + a_1X + \dots + a_{n-1}X^{n-1}$, montrer que $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ est solution d'un système linéaire de n équations à n inconnues.

$$\text{On a } \int_a^b f(x)x^j dx = \langle f, X^j \rangle = \langle Q, X^j \rangle = \int_a^b \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i X^j = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \frac{b^{i+j+1} - a^{i+j+1}}{i+j+1}.$$

16. On pose M la matrice de ce système linéaire. Montrer que M peut s'écrire sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1/j & \dots & 1/n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1/i & \dots & 1/(i+j-1) & \dots & 1/(i+n-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1/n & \dots & 1/(n+j-1) & \dots & 1/(n+n-1) \end{pmatrix},$$

ou plus simplement $M_{i,j} = 1/(i+j-1)$ pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Il faut juste faire attention aux indices.

2.3 Moindres carrés

Lorsqu'on ne cherche plus à approcher ni exactement ni orthogonalement le nuage, on peut chercher à minimiser l'erreur quadratique entre le polynôme et les points. On parle d'approximation aux moindres carrés. Elle est définie ainsi : trouver un polynôme $R \in \mathbb{R}_m[X]$ tel que

$$\sum_{i=1}^n (R(x_i) - y_i)^2 = \inf_{P \in \mathbb{P}_m} \sum_{i=1}^n (P(x_i) - y_i)^2.$$

On note encore $R = a_0 + a_1X + \dots + a_{m-1}X^{m-1}$, on pose M la matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ telle que

$$M = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{j-1} & \dots & x_1^{m-1} \\ 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_i & \dots & x_i^{j-1} & \dots & x_i^{m-1} \\ 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{j-1} & \dots & x_n^{m-1} \end{pmatrix},$$

ou simplement $M_{i,j} = x_i^{j-1}$. Enfin on pose A le vecteur colonne (a_0, \dots, a_{m-1}) et Y le vecteur colonne (y_1, \dots, y_n) .

17. Montrer que trouver le polynôme de minimisation du problème des moindres carrés est équivalent à résoudre le système

$$\|MA - Y\|_2 = \inf_{Z \in \mathbb{R}^n} \|MZ - Y\|_2$$

où $\|\cdot\|_2$ est la norme euclidienne canonique sur l'espace \mathbb{R}^n .

$$\|MA - Y\|_2^2 = \sum_{j=1}^n (MA - Y)_j^2 = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i \frac{1}{i+j} - y_j \right)^2 = \sum_{j=1}^n (R(x_j) - y_j)^2.$$

18. On note M^T la transposée de M . Montrer que la matrice $M^T M$ est diagonalisable.

Elle est carrée, symétrique réelle.

On note V la matrice de passage de $\mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{R})$ telle que $V^T M^T M V = D$ où D est une matrice diagonale de la forme

$$D = \begin{pmatrix} d_1^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & d_m^2 \end{pmatrix}.$$

On note c_j le j -ème vecteur colonne de la matrice MV et v_j le j -ème vecteur colonne de la matrice V . Et J l'ensemble des indices $j \in \{1, \dots, m\}$ tels que $d_j \neq 0$.

19. Montrer que $M = \sum_{j \in J} c_j v_j^T$.

$$M = MVV^T = \sum_{j=1}^m c_j v_j^T \text{ et pour les } j \notin J \text{ on a } c_j = 0.$$

20. Montrer que les vecteurs $u_j = c_j/d_j$ pour les d_j non nuls forment une base orthonormée de l'image de M .

Soit $y \in \text{Im}(M)$ alors il existe $x \in \mathbb{R}^m$ tel que $y = Mx$ d'où $y = \sum_{j \in J} c_j v_j^T x = \sum_{j \in J} d_j \langle v_j, x \rangle c_j/d_j =$

$\sum_{j \in J} d_j \langle v_j, x \rangle u_j$ d'où le caractère générateur. De plus $u_i^T u_j = \delta_{i,j} d_i^2/d_j d_i = \delta_{i,j}$ d'où l'orthonormalisation et donc le caractère libre.

21. Expliquer pourquoi on peut compléter la famille des $(u_j)_{j \in J}$ en une base orthonormée de \mathbb{R}^n .

Gram-Schmidt.

On note U la matrice composée par l'ensemble de ces vecteurs.

22. Montrer que les vecteurs colonnes v_j de V pour $j \in J$ forment une base de l'image de M^T .

$M^T = \sum_{j \in J} v_j c_j^T$ d'où le caractère générateur. Le caractère libre vient du caractère orthogonal des colonnes de la matrice V .

23. Montrer que les vecteurs colonnes v_j de V pour $j \notin J$ forment une base du noyau de M .

Ils forment une base de $\text{Im}(M^T)^\perp = \text{Ker}(M)$.

On pose E la matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ telle que

$$E = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1/d_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 1/d_m & 0 & \dots & 0 \end{array} \right).$$

24. On suppose que le rang de M est m . Montrer que la solution des moindres carrés est donnée par $A = VEU^T Y$.

$VEU^T = \sum_{j \in J} v_j \frac{1}{d_j} u_j^T$ d'où $MVEU^T = \sum_{k \in J} \sum_{j \in J} c_k v_k^T v_j \frac{1}{d_j} u_j^T = \sum_{j \in J} c_j/d_j u_j^T = \sum_{j \in J} u_j u_j^T$ est la

matrice de projection orthogonale sur $\text{Im}(M) = \mathbb{R}^m$. Donc la solution consiste à projeter Y sur \mathbb{R}^m puis résoudre, c'est-à-dire minimiser $MVEU^T Y = MA$. La solution évidente est $A = VEU^T Y$.

25. Quelle est la forme d'une solution lorsque le rang de M n'est plus supposé égal à m ?

Toute solution s'écrit comme $VEU^T Y + (Id - VEU^T M)w$ pour tout $w \in \mathbb{R}^n$. En effet, on projète Y sur $\text{Im}(M)$ ce qui donne à résoudre $MA = MVEU^T Y$ d'où $M(A - VEU^T Y) = 0$ donc trouver $A - VEU^T Y \in \text{Ker}(M)$. Par la question 23, la matrice de projection sur $\text{Ker}(M)$ est $(Id - VEU^T M)$, donc $A - VEU^T Y = (Id - VEU^T M)w$ pour tout $w \in \mathbb{R}^n$.

AVRIL 2015

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ DE LA 2^{ème} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice n° 1

Pour n entier naturel, la fonction réelle f_n est définie par : $f_n(x) = \frac{x^2 + nx + 1}{x + 1}$

1. Etudier les variations de f_0 et donner l'allure de son graphe.

La fonction est définie pour $x \neq -1$ et sa dérivée est égale à : $f_0'(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{(x + 1)^2}$.

Son numérateur admet deux racines : $x = -1 \pm \sqrt{2}$.

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_0(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_0(x)}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f_0(x) - x) = -1$ donc la fonction admet une asymptote oblique d'équation : $y = x - 1$ (de même pour moins l'infini).

La fonction est strictement croissante de $]-\infty, -1 - \sqrt{2}]$ sur $]-\infty, f_0(-1 - \sqrt{2})]$,

La fonction est strictement décroissante de $]-1 - \sqrt{2}, -1[$ sur $]f_0(-1 - \sqrt{2}), -\infty[$,

La fonction est strictement décroissante de $]-1, -1 + \sqrt{2}]$ sur $]f_0(-1 + \sqrt{2}), +\infty[$,

La fonction est strictement croissante de $]-1 + \sqrt{2}, +\infty[$ sur $]f_0(-1 + \sqrt{2}), +\infty[$,

2. Le graphe de la fonction f_0 admet-il un centre de symétrie ? Si oui, préciser ce centre.

La fonction f_0 admet le point A (-1, -1) comme centre de symétrie. En effet, si on pose :

$X = x + 1$ et $Y = y + 1$, on obtient : $Y = X + \frac{2}{X}$ qui est impaire.

3. La fonction f_n admet-elle un point fixe ?, un centre de symétrie ?

Un point fixe vérifie l'équation : $f_n(x) = x$ ou encore : $x = \frac{1}{1 - n}$, si n est différent de 1.

Par ailleurs, $f_n(x) = x + (n - 1) + \frac{2 - n}{x + 1}$. Si on pose : $X = x + 1$ et $Y = y + (1 - n)$, on obtient :

$Y = X + \frac{2 - n}{X}$ qui est impaire et le point B (-1, n-1) est un centre de symétrie.

4. Calculer $I_0 = \int_0^1 f_0(x) dx$

$$I_0 = \int_0^1 f_0(x) dx = \int_0^1 \left(x - 1 + \frac{2}{x+1}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - x + 2 \operatorname{Ln}(x+1)\right]_0^1 = -\frac{1}{2} + 2 \operatorname{Ln} 2$$

5. Calculer $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$ pour tout n et en déduire sa limite.

$$I_n = \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \left(x + n - 1 + \frac{2-n}{x+1}\right) dx = n - \frac{1}{2} + (2-n) \operatorname{Ln} 2 = -\frac{1}{2} + 2 \operatorname{Ln} 2 + n(1 - \operatorname{Ln} 2) \text{ et sa}$$

limite est égale à $+\infty$, car $(1 - \operatorname{Ln} 2) > 0$.

Exercice n° 2

Soit $f:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

1. Etudier les variations de f et tracer son graphe.

$$\text{On a : } f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{x^2} \operatorname{Ln}\left(x + \frac{1}{x}\right)}$$

$$\text{Sa dérivée est égale à : } \frac{1}{x^3} \left(x + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} \left(-2 \operatorname{Ln}\left(x + \frac{1}{x}\right) + x - 1\right).$$

Posons $z = \left(-2 \operatorname{Ln}\left(x + \frac{1}{x}\right) + x - 1\right)$ alors $z' = \frac{2-x}{x}$, d'où $z < 0$ pour tout x strictement positif.

La fonction est donc strictement décroissante de $]0, +\infty[$ sur $] +\infty, 1[$. La droite $y=1$ est une asymptote horizontale et l'axe Oy une asymptote verticale.

2. Etudier la convergence des intégrales : $\int_0^1 f(x) dx$ et $\int_1^{+\infty} f(x) dx$

En 0 : $\operatorname{Ln}\left(x + \frac{1}{x}\right) \approx x^2 - \operatorname{Ln} x$ et $f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} \approx e \cdot e^{-\frac{\operatorname{Ln} x}{x^2}} \rightarrow +\infty$, ceci ne permet pas de conclure, mais $\lim_{n \rightarrow \infty} x^2 f(x) = +\infty$, donc $f(x) > \frac{1}{x^2}$ et l'intégrale est divergente en 0.

En $+\infty$: Si $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ est convergente et si $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x)$ existe (infinie ou non), alors

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = 0$. Mais ici, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = 1$, donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ est aussi divergente.

3. Etudier la suite (u_n) de nombre réels définie par : $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$ et $u_0 > 0$

On vérifie facilement par récurrence que tous les termes de la suite sont strictement positifs et donc $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n} > 0$ et la suite est croissante. Si la suite (u_n) converge vers une limite l alors l est solution de l'équation : $l = f(l)$, d'où $\frac{1}{l} = 0$, ce qui est impossible et la suite est donc divergente.

4. Etudier la suite (w_n) de nombre réels définie par : $w_{n+1} = w_n \times f(w_n)$ et $w_0 > 0$

$\frac{w_{n+1}}{w_n} = f(w_n)$ et si la suite est convergente vers une limite l , alors l est solution de l'équation : $1 = f(l)$ qui n'a pas de solution réelle (d'après la question 1), donc la suite est divergente.

Exercice n° 3

Soit $M = \begin{pmatrix} p & q/2 & q/2 \\ q/2 & p & q/2 \\ q/2 & q/2 & p \end{pmatrix}$, où $p, q > 0$ et $p + q = 1$

1. Déterminer les valeurs propres de la matrice M .

$\det(M - \lambda I) = (1 - \lambda)(p - q/2 - \lambda)^2$, d'où $\lambda = 1$ est une valeur simple et $\lambda = p - q/2 = \frac{3p-1}{2}$ est une valeur double.

2. Etudier la diagonalisation de la matrice M .

Si $p - q/2 = 1$, ce qui est impossible car $p + q = 1$.

Si $p - q/2 \neq 1$, la matrice M est diagonalisable si et seulement si la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda = p - q/2$ est égale à deux.

On trouve deux vecteurs propres associés : $u_2(1, -1, 0)$ et $u_3(0, -1, 1)$. Et $u_1(1, 1, 1)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 1.

M est diagonalisable et semblable à $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & p - q/2 & 0 \\ 0 & 0 & p - q/2 \end{pmatrix}$

3. Calculer M^n pour tout entier n .

$$M^n = P\Delta^n P^{-1}, \text{ avec } \Delta^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (p-q/2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (p-q/2)^n \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{On obtient } M^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1+2(p-q/2)^n & 1-(p-q/2)^n & 1-(p-q/2)^n \\ 1-3(p-q/2)^n & 1 & 1+3(p-q/2)^n \\ 1+(p-q/2)^n & 1+(p-q/2)^n & 1-2(p-q/2)^n \end{pmatrix}$$

4. Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} M^n$

$$\text{On vérifie aisément que } \left| p - \frac{q}{2} \right| \leq \frac{1}{2}, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow \infty} M^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice n° 4

$$\text{Soit } f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ définie par : } f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y = 0 \\ y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \end{cases}$$

Pour tout le problème les difficultés se situent sur la droite $y=0$, en dehors, la fonction est indéfiniment différentiable.

1. Etudier la continuité de f

Le problème de la continuité se situe sur la droite $y=0$. Donc $\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 0 = f(x, 0)$ et f est continue.

2. Montrer que f admet des dérivées partielles premières en tout point.

$$\text{Pour } y \neq 0, f'_x(x, y) = y \cos\left(\frac{x}{y}\right) \text{ et } f'_y(x, y) = 2y \sin\left(\frac{x}{y}\right) - x \cos\left(\frac{x}{y}\right)$$

Pour $y=0$:

$$f'_x(x_0, 0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, 0) - f(x_0, 0)}{x - x_0} = 0 \text{ et } f'_y(x, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - f(x, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} y \sin \frac{x}{y} = 0.$$

Ces deux dérivées partielles existent et sont nulles.

3. Etudier la continuité des dérivées partielles premières de f .

On a : $\lim_{y \rightarrow 0} f'_x(x, y) = 0 = f'_x(x, 0)$ et cette dérivée partielle est continue.

Par contre, $\lim_{y \rightarrow 0} f'_y(x, y)$ n'existe pas et nous n'avons pas la continuité.

4. Etudier la différentiabilité de f .

Si f est différentiable en un point $(x_0, 0)$, alors sa différentielle est nulle.

Si $x_0 = 0$, f est différentiable en $(x_0, 0)$ si et seulement si $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$. Ce qui est

vérifié par passage en coordonnées polaires, puisque le numérateur est en r^2 et le dénominateur en r .

Si $x_0 \neq 0$, f est différentiable en $(x_0, 0)$ si et seulement si $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,0)} \frac{f(x,y)}{\|(x-x_0, y)\|} = 0$, ce qui est

vérifié car le numérateur est en y^2 .

Exercice n° 5

On considère n valeurs réelles x_i strictement positives et telles que : $x_i < x_{i+1}$ pour tout i compris entre 1 et $n-1$. Soit α un paramètre réel.

1. Résoudre le problème d'optimisation suivant : $\min_{\alpha} \sum_{i=1}^n (x_i - \alpha)^2$

La fonction f définie par : $f(\alpha) = \sum_{i=1}^n (x_i - \alpha)^2$ est convexe strictement donc elle admet un minimum pour la valeur qui annule sa dérivée.

$$f'(\alpha) = -2 \sum_{i=1}^n (x_i - \alpha) = -2 \left[\left(\sum_{i=1}^n x_i \right) - n\alpha \right] \text{ qui est nulle pour } \alpha = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \text{ (moyenne).}$$

2. On suppose que $\alpha \geq x_n$. Résoudre dans ce cas, le problème : $\min_{\alpha} \sum_{i=1}^n |x_i - \alpha|$. On notera m_1 la valeur de ce minimum et α_1 son argument.

$$\text{Soit } \varepsilon_i(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha > x_i \\ -1 & \text{si } \alpha < x_i \end{cases} \text{ et posons } g(\alpha) = \sum_{i=1}^n |x_i - \alpha| = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(\alpha)(\alpha - x_i) \geq 0$$

Comme $\alpha \geq x_n$, $\alpha \geq x_i$ et $\varepsilon_i(\alpha) = 1$, d'où $g(\alpha) = \sum_{i=1}^n (\alpha - x_i) = n\alpha - \sum_{i=1}^n x_i$ et cette valeur est minimale pour $\alpha_1 = x_n$

3. On suppose que $\alpha \leq x_1$. Résoudre dans ce cas, le problème : $\text{Min}_{\alpha} \sum_{i=1}^n |x_i - \alpha|$. On notera m_2 la valeur de ce minimum et α_2 son argument.

Par un raisonnement analogue à la question précédente, on obtient : $\alpha_2 = x_1$

4. Comparer m_1 et m_2 .

De la question 2, on obtient $m_1 = n(x_n - \bar{X})$, où \bar{X} désigne la moyenne des x_i

De la question 3, on obtient $m_2 = n(\bar{X} - x_1)$.

Par conséquent $m_1 > m_2$ si et seulement si $\frac{x_1 + x_n}{2} > \bar{X}$

Exercice n° 6

Soient q_1 et q_2 deux applications définies sur $M_n(\mathbb{R})$ respectivement par :

$$q_1(A) = (\text{Tr}(A))^2 \text{ et } q_2(A) = \text{Tr}({}^tAA), \text{ où}$$

$M_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels,

$\text{Tr}(A)$ désigne la trace d'une matrice A de $M_n(\mathbb{R})$ et tA la transposée de A .

1. Montrer que q_1 et q_2 sont des formes quadratiques.

Il suffit de trouver les formes bilinéaires symétriques associées.

On a : $\varphi_1(A, B) = \frac{1}{4} [(\text{Tr}(A+B))^2 - (\text{Tr}(A-B))^2] = \text{Tr}(A).\text{Tr}(B)$ et on vérifie que c'est une forme bilinéaire symétrique.

De même, $\varphi_2(A, B) = \text{Tr}({}^tBA)$.

2. q_1 et q_2 sont-elles positives ?, définies positives ?

φ_1 est positive mais non définie positive car pour $n > 1$, la matrice A qui ne comporte que des zéros sauf un 1 pour le terme en haut à droite est non nulle et pourtant $\varphi_1(A) = 0$

Pour φ_2 , si $A = (a_{ij})$ et si ${}^tAA = (b_{ij})$, on a : $b_{kk} = \sum_{l=1}^n a_{kl}^2$, d'où $\varphi_2(A) = \sum_{k,l=1}^n a_{kl}^2$, donc

$\varphi_2(A) \geq 0$ et $\varphi_2(A) > 0$ dès que la matrice est non nulle.

Exercice n° 7

Soit f la fonction réelle définie par : $f(x) = \begin{cases} a \cdot 3^{-x} & \text{si } x > 0 \\ a \cdot 3^x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

1. Déterminer le paramètre a pour que f soit la densité d'une loi de probabilité.

$$\text{On doit avoir } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 = a \int_{-\infty}^0 3^x dx + a \int_0^{+\infty} 3^{-x} dx$$

On a : $\int_0^{+\infty} 3^{-x} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x \ln 3} dx = \frac{1}{\ln 3}$ et $\int_{-\infty}^0 3^x dx = \frac{1}{\ln 3}$, donc f est une densité de probabilité si

$$a = \frac{\ln 3}{2}. \text{ Dans ce cas, on a : } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

2. Soit X la variable aléatoire dont f est la densité. Déterminer la fonction de répartition de X .

$$\text{Si } x < 0, F(x) = \frac{\ln 3}{2} \int_{-\infty}^x e^{t \ln 3} dt = \frac{3^x}{2} \text{ et si } x \geq 0, F(x) = F(0) + \int_0^x e^{-t \ln 3} dt = 1 - \frac{3^{-x}}{2}$$

3. Calculer, si elle existe l'espérance de X .

$$\text{Par définition, l'espérance est : } E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

La fonction $x f(x)$ est négligeable devant $\frac{1}{x^2}$ au voisinage de l'infini, donc intégrable.

$$\text{Et comme } x f(x) \text{ est impaire, } E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = 0$$

4. Soit $Y = 3^X$. Déterminer la fonction de répartition de Y et son espérance, si elle existe. Y prend ses valeurs dans l'ensemble des nombres réels positifs, on a :

$$P(Y \leq x) = P(3^X \leq x) = P(X \leq \frac{\ln x}{\ln 3})$$

$$\text{Si } 0 \leq x \leq 1, F_Y(x) = \frac{1}{2} 3^{\ln x / \ln 3} = \frac{x}{2}$$

$$\text{Si } x > 1, F_Y(x) = 1 - \frac{1}{2} 3^{-\ln x / \ln 3} = 1 - \frac{1}{2x}$$

Pour $x > 1$, la densité de Y est : $f_Y(x) = F_Y'(x) = \frac{1}{2x^2}$. Au voisinage de l'infini, $x f(x)$ est

équivalente à $\frac{1}{x}$ qui n'est pas intégrable, donc l'espérance de Y n'existe pas.