ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2015

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

L'humanité se doit de donner le meilleur d'elle-même aux enfants (Nations Unies, préambule de la Déclaration des Droits de l'Enfant, 1959). Commentez.

Sujet n° 2

Le problème aujourd'hui n'est pas l'énergie atomique, a affirmé Albert Einstein*, mais le cœur des hommes*. Qu'en pensez-vous ?

Sujet n° 3

D'après les Nations Unies, *éradiquer l'extrême pauvreté et la faim avant 2030 est un programme ambitieux mais reste possible*. Etes-vous d'accord ? Argumentez avec des exemples précis.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2015

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

L'épreuve comporte un exercice et un problème, indépendants, à traiter dans un ordre quelconque.

Exercice

On considère l'ensemble C des nombres complexes.

1) Résoudre dans C l'équation :

$$z^2 - (1 + \sqrt{2})z + \sqrt{2} = 0$$

2) Résoudre dans C l'équation :

$$z^4 - (1 + \sqrt{2})z^3 + (2 + \sqrt{2})z^2 - (1 + \sqrt{2})z + 1 = 0$$

Indication : on pourra faire intervenir la variable auxiliaire $u = z + \frac{1}{z}$

Problème

Le symbole Ln désigne le logarithme népérien.
On donne les valeurs numériques suivantes :
$e = 2{,}718$; $e^2 = 7{,}39$; $Ln\ 2 = 0{,}69$; $Ln\ 0{,}6 = -0{,}51$; $Ln\ 0{,}7 = -0{,}36$; $Ln\ 0{,}8 = -0{,}22$.

Définition générale
Soit p et q deux nombres entiers, tels que $p \geq 1$ et $q \geq 1$.
On considère la famille W(p, q), paramétrée par p et q, des fonctions $f_{p,q}$ définies sur $]0, +\infty[$ par :

$$f_{p,q}(x) = \frac{(Ln\ x)^p}{x^q}$$

Partie A

Dans cette partie, on pose $q = 1$ et on étudie le sous-ensemble de $W(p, 1)$ formé des fonctions $f_{p,1}$ et pour simplifier les notations, on écrira f_p pour $f_{p,1}$.

$$f_p(x) = \frac{(Ln\,x)^p}{x}$$

1) Etudier de façon très précise les variations des fonctions f_1 et f_2 (points caractéristiques, tangentes, limites, concavité, asymptotes éventuelles, etc …).
Tracer les graphes F_1 et F_2 des fonctions f_1 et f_2 dans un repère orthonormé.
2) Soit a un nombre réel, $a > 0$. On appelle A le point de F_2 d'abscisse a.
Donner l'équation de la droite $D(a)$ tangente à F_2 au point A.
Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre a la droite $D(a)$ passe-t-elle par l'origine O ?

3) Calculer l'intégrale $U(p) = \int_1^{e^p} f_p(x)dx$.
Donner la valeur de $U(3)$.
Que vaut la limite de $U(p)$ quand $p \to +\infty$?

Partie B

Dans cette partie, on considère $q = 2$.
On notera par g_p une fonction de $W(p, 2)$: $g_p = f_{p,2}$

$$g_p(x) = \frac{(Ln\,x)^p}{x^2}$$

1) Etudier précisément les variations de g_2 ; donner la forme générale de son graphe.

2) On considère l'intégrale $J(2) = \int_1^{e^2} g_2(x)dx$.

Calculer la valeur de $J(2)$.

3) Etudier les variations de g_p et donner la forme générale de son graphe G_p.

4) Soit l'intégrale $J(p) = \int_1^{e^2} g_p(x)dx$.

Etablir une relation entre $J(p+1)$ et $J(p)$ de la forme $J(p+1) = h(p).J(p) + k(p)$, où $h(p)$ et $k(p)$ sont des fonctions de p que l'on explicitera.
En déduire les valeurs de $J(2)$, $J(3)$ et $J(4)$.

Partie C

Soit Δ la droite d'équation $y = x/e^2$ et P la parabole d'équation $y = x^2$.

1) Etudier l'existence de point(s) d'intersection de Δ et de F_2.
Donner leur valeur exacte ou, sinon, un encadrement à 0,1 près.

2) Etudier les points d'intersection de P et de G_2, graphe de g_2 En donner un encadrement à 0,1 près.

Partie D

On veut étudier les variations de la fonction générale $f_{p,q}$.

1) Calculer la dérivée première de $f_{p,q}$, et étudier son signe.

2) Quelles sont les limites de $f_{p,q}$ quand $x \to 0$ et $x \to +\infty$?

3) En déduire les variations de $f_{p,q}$.

4) Calculer la dérivée seconde de $f_{p,q}$ et déterminer le nombre de points d'inflexion du graphe de $f_{p,q}$.

5) Soit $p > 1$ et $q > 1$. On considère l'intégrale $A(p, q) = \int_1^{+\infty} f_{p,q}(x)dx$
Etablir une relation de récurrence de la forme $A(p, q) = u(p, q) + v(p, q).A(p-1, q)$, où $u(p, q)$ et $v(p, q)$ sont des fonctions de p et q que l'on explicitera.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2015

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

ÉCONOMIE

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des deux sujets suivants.

Sujet n° 1

Lors d'un récent séminaire, le président du Groupe de la Banque Mondiale, Jim Yong Kim a déclaré *« Pensez-y : un groupe bien moins nombreux que les personnes présentes dans cette salle possède plus de richesses que la moitié de la population mondiale. Alors que tant de personnes vivent dans une pauvreté extrême en Afrique, ainsi qu'en Asie et en Amérique latine, cette situation entache notre conscience collective. Il est extrêmement important de préserver la capacité des individus à tirer un bénéfice financier de leur dur labeur et de leur réussite. Cela crée de la motivation, stimule l'innovation et permet aux gens de s'entre-aider. En même temps, que signifie le fait qu'une telle proportion des énormes richesses de la planète revient à si peu de gens ? »*

Après avoir présenté les principaux instruments utilisés pour mesurer les inégalités et les apports de la théorie économique sur la répartition des revenus, vous discuterez la pertinence des propos rapportés ci-dessus.

Sujet n° 2

Après avoir rappelé les limites du marché comme mode exclusif de régulation de l'économie, vous vous interrogerez sur la place et le rôle de la puissance publique dans le soutien à la croissance économique en fonction des différents niveaux de développement.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2015

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

L'épreuve est composée de trois problèmes indépendants, à traiter dans un ordre quelconque.

Problème 1

Une urne contient 11 boules : 6 bleues, 3 rouges et 2 vertes.
On procède à un tirage simultané de 3 boules.

1) Calculer la probabilité que les 3 boules tirées soient toutes de couleurs différentes.

2) Calculer la probabilité que les 3 boules soient de la même couleur.

3) On définit la variable aléatoire X égale au nombre de boules bleues tirées.
Donner la loi de probabilité de X.
Calculer son espérance et son écart-type.

Problème 2

Les parties A et B sont indépendantes.

M_3 désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.

Partie A

Soit une matrice $M \in M_3$.
On suppose que M vérifie la relation (R) :

$$(R) \qquad M^2 = aM + bI$$

où I est la matrice identité de M_3, et a et b sont deux nombres réels non nuls.

1) Montrer que M est inversible et donner l'expression de son inverse M^{-1}.

2) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Montrer que A vérifie la relation (R), et donner les valeurs de a et b associées.

3) En déduire l'expression de A^{-1}, inverse de A.

Partie B

Soit B la matrice suivante de M_3 :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Quelles sont les valeurs propres de B ? En déduire que B est diagonalisable (on notera par D la matrice diagonale semblable à B).

2) Déterminer une base de vecteurs propres et donner la matrice de passage P.

3) n étant un entier naturel non nul, donner l'expression générale de B^n en fonction de D et P et calculer sa valeur explicite.

Problème 3

Partie A

On considère deux suites réelles $\{a(n)\}$ et $\{b(n)\}$, n entier strictement positif, définies par :

(1) $a(1) = 1$ et $a(n+1) = a(n) + 2$
(2) $b(1) = 6$ et $b(n+1) = b(n) - 1$

On considère la suite $\{u(n)\}$ définie pour tout n entier strictement positif par :

$$u(n) = 10a(n) + b(n)$$

1) Quelle est la nature des suites $\{a(n)\}$ et $\{b(n)\}$? Déterminer les expressions des termes généraux $a(n)$ et $b(n)$ en fonction de n, $a(1)$, $b(1)$.

2) Quelle est la nature de la suite $\{u(n)\}$? Donner l'expression du terme général $u(n)$ en fonction de n et $u(1)$.

3) A partir de quelle valeur de n la condition $u(n) > 1000$ est-elle vérifiée ?

4) On donne la liste de chiffres : 1 – 6 – 3 – 5 – 5 – 4 – 7 – ….
Quels sont les trois chiffres suivants ?

Partie B

On considère deux suites réelles $\{a(n)\}$ et $\{b(n)\}$, n entier strictement positif, définies par :

(1) $a(1)$ et $a(n+1) = a(n) + \lambda$
(2) $b(1)$ et $b(n+1) = b(n) + \mu$

où $a(1)$ et $b(1)$ sont des entiers compris entre 1 et 6, λ et μ sont des nombres entiers relatifs, non nuls, tels que $-2 \leq \lambda, \mu \leq 2$.

1) Donner la nature de la suite $\{u(n)\}$, définie comme dans la Partie *A*, et l'expression de son terme général $u(n)$ en fonction de n, $u(1)$, λ et μ.
La suite $\{u(n)\}$ peut-elle être une suite constante ?

2) Pour n fixé, déterminer le maximum et le minimum de $u(n)$.

3) Etudier l'éventuelle nullité de $u(n)$ selon les valeurs de $a(1)$, $b(1)$, λ et μ. Quelles sont alors les valeurs de n telles que $u(n) = 0$?