AVRIL 2014

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CORRIGE DE LA 1ère COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Exercice n° 1

1. Calculer, en $x = 0$, la dérivée de : $\frac{x e^x}{1+x^2}$

La dérivée est égale à : $\frac{(1-x^2)e^x}{(1+x^2)^2} + \frac{\mathrm{x\,e}^{\mathrm{x}}}{1+\mathrm{x}^2}$, puis pour $x = 0$, on obtient 1

2. Calculer $I = \int_{-1}^{1} x^2 \sin x \; dx$

Comme la fonction est impaire, l'intégrale est nulle.

3. Résoudre le système d'équations :

$$\begin{cases} e^{x+y} = \sqrt{e^3} \\ x^2 + y = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Le système devient : $\begin{cases} x + y = \dfrac{3}{2} \\ x^2 + y = \dfrac{3}{2} \end{cases}$, soit $x(x-1) = 0$. L'ensemble des solutions est : $(x, y) = (0, 3/2)$ *ou* $(1, 1/2)$

4. Déterminer le nombre de solutions de l'équation : $2x + 1 + \int_0^1 \frac{t^2\, e^t}{t^2+2} dt = 0$

L'intégrale ci dessus est un nombre réel, donc il n'y a qu'une solution.

5. Calculer $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{x^x}{1+x}$

$\lim\limits_{x\to 0+} \frac{x^x}{1+x} = \lim\limits_{x\to 0+} e^{x\,Ln\,x} = 1$

6. Dans un repère orthonormé de l'espace R^3, déterminer un vecteur orthogonal au plan d'équation : $3x-5y+2z-4=0$. Le vecteur u(3,-5,2) est orthogonal.

7. Soit f la fonction numérique d'une variable réelle définie par : $f(x)=(1-k)^3x^2+(1+k)x^3$

où k est un paramètre réel. Pour quelles valeurs de k, l'origine est-elle un extremum local ?
On a : $f^{'}(x)=2(1-k)^3x+3(1+k)x^2$ et $f^{'}(0)=0$

De plus $f^{''}(x)=2(1-k)^3+6(1+k)x$ et $f^{''}(0)=2(1-k)^3$

L'origine est un extremum local si et seulement si $k\neq 1$

8. Calculer l'intégrale $I=\int_0^1 \frac{2x^2+3x}{x+2}\,dx$

On a (par division euclidienne) : $\frac{2x^2+3x}{x+2}=2x-1+\frac{2}{x+2}$

D'où $I=\left[x^2-x+2Ln(x+2)\right]_0^1=2\,Ln\left(3/2\right)$

9. Dans une population de lycéens, 30 % font du sport hors du lycée. Parmi les sportifs, 15 % font du volley, 20 % de la natation, et 5 % font à la fois du volley et de la natation. Quel est le pourcentage de lycéens faisant du volley, mais pas de natation ?

On a : 15%-5%=10% des 30%, soit 3%

10. Calculer $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k$, où n est un entier naturel non nul et $\binom{n}{k}$ désigne le nombre de combinaisons de k éléments pris parmi n. En développant par la formule du binôme,

$(1-1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k=0$

Exercice n° 2

On définit, sur R, la fonction G_k par : $G_k(x) = e^{-kx^2}$, où k est un nombre réel strictement positif.

1. Etudier les variations de G_k.

La fonction est paire, donc son graphe sera symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et on en fait l'étude que pour les réels positifs.
On obtient : $G_k^{'}(x) = -2kx e^{-kx^2}$ et la fonction est décroissante à valeurs dans l'intervalle 0,1.
L'axe des abscisses est une asymptote.

2. Résoudre l'équation : $G_k^{''}(x) = 0$

$G_k^{''}(x) = 2k\, e^{-kx^2}\,(2k^2x^2 - 1)$
Cette fonction s'annule pour $x = \mp 1/2K$

3. Tracer le graphe de G_k pour k= ½ et k=1. On obtient une courbe de Gauss qui est plus étalée pour k= ½ que pour k=1.

4. On suppose k= ½ . Soit a la solution positive de l'équation $G_k^{''}(x) = 0$. Déterminer l'équation de la tangente au graphe de G_k au point d'abscisse a.

Pour k= ½, a=1. L'équation de la tangente est donnée par : $y = G_k(1) + G_k^{'}(1)(x-1)$, soit $y = \dfrac{2-x}{\sqrt{e}}$

Exercice n° 3

Soit $f : [a,b] \to R$, une application continue telle que : $\int_a^b f(t)\; g(t)\, dt = 0$ pour toutes fonctions en escalier g, définies sur $[a,b]$. Expliciter f.
Si f est non nulle sur $[a,b]$, il existe un x tel que *f(x)*>0 (sinon on change f en $-f$ et les hypothèses restent valables). Comme f est continue, il existe un voisinage (un intervalle) de cet x sur lequel la fonction reste strictement positive. On considère alors la fonction g en escalier égale à 1 sur cet intervalle et 0 ailleurs, alors l'hypothèse $\int_a^b f(t)\; g(t)\, dt = 0$ n'est plus vérifiée. Par conséquent, f=0.

Exercice n° 4

Soit la suite (F_n) définie par :

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \text{ et } F_1 = -3\,;\, F_2 = 2$$

1. Exprimer $(F_n)^2 - F_{n+1} \times F_{n-1}$ en fonction de *n*.

On trouve, $F_3 = 1;\ F_4 = -1$. Montrons par récurrence que : $(F_n)^2 - F_{n+1} \times F_{n-1} = (-1)^n$
Cette relation est vérifiée pour *n*=2 et *n*=3, puis on suppose que cette relation est vraie jusqu'à l'ordre *n*+1.

$$(F_{n+1})^2 - F_{n+2} \times F_n = (F_{n+1})^2 - F_n\,(F_{n+1} + F_n) = (F_{n+1})^2 - F_{n+1} \times F_n - F_n^2$$

$$(F_{n+1})^2 - F_{n+2} \times F_n = (F_{n+1})^2 - F_{n+1} \times F_n + (-1)^{n+1} - F_{n-1} \times F_{n+1} =$$

$$(F_{n+1})^2 - F_{n+1}\,(F_n + F_{n-1}) + (-1)^{n+1} = (F_{n+1})^2 - (F_{n+1})^2 + (-1)^{n+2} = (-1)^{n+2}$$

2. La suite (F_n) est-elle convergente ?

Si la suite (F_n) converge vers une limite *l*, alors *l* serait solution de $l^2 - l \times l = Lim\,(-1)^{n+1}$ qui n'existe pas. Par conséquent la suite est divergente.

Exercice n° 5

On considère la fonction numérique f à valeurs réelles définie par:

$$f(x) = x^2 \times Ln(x^2 + 1)$$

On note C la courbe représentative de la fonction f dans le plan, muni d'un repère orthogonal et *Ln* désigne le logarithme népérien.

1.Etudier les variations de la fonction f et tracer *C*.

On peut remarquer que la fonction est paire et l'étudier que sur les réels positifs.
La dérivée de *f* est égale à : $f'(x) = 2x \times Ln(x^2 + 1) + \dfrac{2x^3}{1 + x^2} \geq 0$
La fonction est donc strictement croissante sur R_+, elle admet une branche parabolique dans la direction oy et est convexe.

2. Calculer $I = \int_0^1 f(x)\,dx$

On calcule cette intégrale par parties : $I = \int_0^1 x^2 Ln(1+x^2)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} Ln\ (1+x^2)\right]_0^1 - \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{x^4}{1+x^2}$

Par ailleurs, $\frac{x^4}{1+x^2} = x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2}$

D'où $\int_0^1 \frac{x^4}{1+x^2} = \left[\frac{x^3}{3} - x + Arctg(x)\right]_0^1 = -2/3 + \pi/4$

On obtient finalement : $I = \int_0^1 x^2 Ln(1+x^2)\,dx = \frac{Ln\,2}{3} - \frac{2}{3}(-\frac{2}{3} + \frac{\pi}{4}) = \frac{Ln\,2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{\pi}{6}$

3. On considère la fonction numérique f_n à valeurs réelles définie par:

$f_n(x) = x^n \times Ln(x^2+1)$, où *n* est un entier strictement supérieur à 2.

Etudier les variations de la fonction f_n et tracer son graphe.

Si *n* est pair, la fonction est également paire, de même si *n* est impair, la fonction est impaire, d'où l'étude que sur les réels positifs.

La dérivée est égale à : $f_n^{'}(x) = nx^{n-1} \times Ln(x^2+1) + \frac{2x^{n+1}}{1+x^2} = x^{n-1} \times \frac{n(1+x^2)\,Ln(1+x^2) + 2x^2}{1+x^2}$

La fonction est donc strictement croissante sur R_+, elle admet une branche parabolique dans la direction Oy et est convexe. La symétrie étant différente selon la parité de *n*.

4. Calculer $J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx$ en fonction de *n* (entier naturel). On calculera d'abord J_0, J_1 et J_2.

$J_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = [Arctg\,x]_0^1 = \pi/4$; $J_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}[Ln(1+x^2)]_0^1 = \frac{Ln2}{2}$;

Et $J_2 = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = [x - Arctg\,x]_0^1 = 1 - \pi/4$

On vérifie par récurrence les expressions suivantes :

$$\frac{x^{2n}}{1+x^2} = x^{2n-2} - x^{2n-4} + ... + (-1)^{n+1} + (-1)^n \frac{1}{1+x^2} \; et \; \frac{x^{2n+1}}{1+x^2} = x^{2n-1} - x^{2n-3} + ... + (-1)^{n+1} + (-1)^n \frac{x}{1+x^2}$$

$$J_{2n} = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n-3} + ... + (-1)^{n+1} + (-1)^n \pi/4$$

$$J_{2n+1} = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n-2} + ... + (-1)^{n+1} + (-1)^n Ln2/2$$

5. Calculer $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$ en fonction de *n*.

Par intégration par parties : $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx = \left[\frac{x^{n+1} Ln(1+x^2)}{n+1}\right]_0^1 - \frac{2}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{1+x^2} dx$

$$I_n = \frac{Ln 2}{n+1} - \frac{2}{n+1} J_{n+2}$$

Il suffit alors de remplacer la deuxième intégrale par sa valeur trouvée à la question précédente, pour obtenir :

$$I_{2n} = \frac{Ln 2}{2n+1} - \frac{2}{2n+1}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n-3} + ... + (-1)^n + (-1)^{n-1} \pi/4\right)$$

$$I_{2n-1} = \frac{Ln 2}{2n} - \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n-2} + ... + (-1)^{n+1} + (-1)^n Ln2/2\right)$$

Exercice n° 6

1. Ecrire le développement limité de $\frac{1}{1+x}$ au voisinage de l'origine, à l'ordre 3.

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)$$

2. En déduire le développement limité de $\frac{1}{1+e^x}$ au voisinage de l'origine à l'ordre 3.

On peut soit dans l'expression précédente remplacer x par le développement de e^x ou effectuer la division du numérateur par le dénominateur. Dans les deux cas, on obtient :

$$\frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^3}{48} + o(x^3)$$

3. Soit $f(x)=\dfrac{x}{1+e^{1/x}}$. Déterminer l'équation de l'asymptote au graphe de *f* pour $x\to+\infty$

On pose $X=1/x$ et $X\to+0$.

Alors $f(x)=\dfrac{x}{1+e^{1/x}}=\dfrac{1}{X(1+e^{X})}=\dfrac{1}{2X}-\dfrac{1}{4}-\dfrac{X^2}{48}+o(X^2)$.

La droite $y=\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{4}$ est asymptote au graphe en $+\infty$.

Exercice n° 7

Soit *F* l'application numérique définie par : $F(x)=\int_x^{2x}\dfrac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$

1. Montrer que *F* est définie, continue et dérivable sur *R*

La fonction est définie, continue et dérivable car $t\to\dfrac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$ est définie et continue et $x\to 2x$ est dérivable.

2. Etudier la parité de *F*. En posant *t* = -*x*, on vérifie que *F* est impaire.

3. Montrer que pour tout $x>0$: $0<F(x)<\dfrac{1}{2x}$. En déduire la limite de *F* en $+\infty$

On a : $0<\dfrac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}}<\dfrac{1}{\sqrt{t^4}}=\dfrac{1}{t^2}$ et par intégration $0<F(x)<\dfrac{1}{2x}$. Par conséquent: $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0$.

4. Calculer la dérivée de *F* et résoudre l'équation $F'(x)=0$ pour $x>0$.

$$F'(x)=\frac{2}{\sqrt{(2x)^4+(2x)^2+1}}-\frac{1}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$$

$$F'(x)=\frac{3(1-4x^4)}{\sqrt{16x^4+4x^2+1}\times(\sqrt{x^4+x^2+1})(2\sqrt{x^4+x^2+1}-\sqrt{16x^4+4x^2+1})}$$

Cette dérivée est nulle si et seulement si son numérateur est nul.

On obtient : $x^4=1/4$ et $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

AVRIL 2014

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CORRIGE DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Exercice n° 1

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = x^2 e^{-x}$

1. Cette fonction est définie pour tout nombre réel, sa dérivée est égale à $f'(x) = xe^{-x}(2-x)$. Tableau de variation :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		-		+		-	
y	$+\infty$	$\downarrow$	0	$\uparrow$	$4/e^2$	$\downarrow$	0

2. La convexité de f est étudiée à partir des valeurs qui annulent sa dérivée seconde. On a $f''(x) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$. Cette dérivée s'annule pour $x = 2 \pm \sqrt{2}$. La fonction est convexe sur les intervalles : $\left]-\infty, 2-\sqrt{2}\right]$ et $\left[2+\sqrt{2}, +\infty\right[$

3.

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \left[-e^{-x}x^2\right] + \int_0^1 2xe^{-x}dx = -\frac{1}{e} + 2\int_0^1 xe^{-x}dx = -\frac{1}{e} + 2\left[-e^{-x}x\right] + 2\int_0^1 e^{-x}dx = -\frac{5}{e} + 2$$

Exercice n° 2

Soit f la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels strictement positifs par : $f(x) = x^3\,Ln(x)$ où Ln désigne le logarithme népérien.

1. Etudier les variations de f. Cette fonction est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

La dérivée de f est égale à : $f'(x) = x^2\,(3Ln(x)+1)$ et s'annule pour $x = e^{-1/3}$. On peut prolonger la fonction par zéro à l'origine. Elle est décroissante sur $\left[0, e^{-1/3}\right]$ et croissante ensuite.

2. Etudier la convexité de *f*.

La dérivée seconde est égale à : $f''(x) = x(6Ln(x)+5)$. La fonction est concave sur $\left[0, e^{-5/6}\right]$ et convexe ensuite.

3. Tracer le graphe de *f*.

4. Calculer $\int_0^1 f(x)\,dx$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4}Ln(x)\right] - \frac{1}{4}\int_0^1 x^3\,dx = -\frac{1}{16}$$

Exercice n° 3

Répondre par vrai ou faux aux questions suivantes, en justifiant votre réponse par une démonstration ou un contre-exemple:

1. Toute primitive d'une fonction positive ou nulle sur un intervalle $[a,b]$ est positive ou nulle.

Soit *F* une primitive de *f* sur $[a,b]$. On pose $M = Sup\left|F(x)\right| \geq 0$. *G* définie par $G(x) = F(x) - 2M - 1$ est aussi une primitive de *f*.
On a : $-M \leq F(x) \leq M \Rightarrow -3M - 1 \leq F(x) - 2M - 1 \leq -M - 1 \Rightarrow G(x) \leq -M - 1 < 0$
Par conséquent la proposition est fausse.

2. Toute primitive d'une fonction négative ou nulle sur un intervalle $[a,b]$ est décroissante.

Soit *F* une primitive de *f* sur $[a,b]$, alors $F'(x) = f(x) \leq 0$, donc F est décroissante.
Par conséquent la proposition est vraie.

3. Toute fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ est la primitive d'une fonction continue.

Si pour toute fonction continue F sur un intervalle $[a,b]$, il existe f continue telle que $F'(x) = f(x)$, cela voudrait dire que toute les fonctions continues sont de classe C^1.
Trouvons un contre-exemple. Soit $F(x) = |x|$ sur l'intervalle $[-1,1]$. Cette fonction est continue et n'est pas la primitive d'une fonction continue.

Par conséquent la proposition est fausse.

Exercice n° 4

Soit $M(x, y)$ un point du plan où $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$.
On pose $D = \{(x, y) \in R^2 / x^2 + y^2 \le 1\}$.
On tire aléatoirement des valeurs de *x* et de *y*. Quelle est la probabilité que le point *M* appartienne au domaine *D* ?
La probabilité est égale au rapport des surfaces des deux ensembles (le quart du cercle unitaire et le carré), soit $\pi / 4$

Exercice n° 5

Soit *f* l'application numérique définie par : $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x + 1}$

1. Etudier les variations de *f*.

La dérivée de *f* est égale à : $f'(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$. Cette dérivée s'annule en 0 et -2. La droite *x*=-1 est une asymptote verticale et la droite d'équation *y*=*x* est une asymptote oblique.

La fonction est strictement croissante de $]-\infty, -2]$ sur $]-\infty, -3]$
La fonction est strictement décroissante de $[-2, -1[$ sur $[-3, -\infty[$
La fonction est strictement décroissante de $]-1, 0]$ sur $]+\infty, 1]$
La fonction est strictement croissante de $[0, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$

2. On considère la suite (u_n) de nombres réels définie par : $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
Etudier la convergence de cette suite (u_n).

La suite est strictement positive. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{1 + u_n} > 0$, la suite est donc croissante. Si elle était majorée, elle convergerait vers une limite *l* qui vérifierait : $l = f(l)$, ce qui est impossible, donc la suite est divergente.

3. Calculer $\int_0^1 f(x)\,dx$

On a : $\dfrac{x^2 + x + 1}{x + 1} = x + \dfrac{1}{x + 1}$ et $\int_0^1 f(x)\,dx = \left[\dfrac{x^2}{2} + Ln(x+1)\right]_0^1 = \dfrac{1}{2} + Ln\,2$

4. Calculer $\lim_{x\to+\infty}\int_1^x (f(t)-t)\,dt$

On a $\lim_{x\to+\infty}\int_1^x (f(t)-t)\,dt = \lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{1}{t+1}\,dt = \lim_{x\to+\infty} Ln(x+1) = +\infty$

5. Trouver une fonction g continue telle que $\lim_{x\to+\infty}\int_1^x (g(t)-t)\,dt$ soit finie.

Si cette limite est finie, il faut que $(g(t)-t)$ tende vers zéro et que l'intégrale soit convergente. Soit, par exemple, $g(t)=t+\frac{1}{t^2}$ et dans ce cas la limite recherchée est égale à 1.

Exercice n° 6

Pour tout entier naturel *n*, on pose : $I_n = \int_1^e (Ln\,t)^n\,dt$, où *Ln* désigne le logarithme népérien.

1. Calculer I_0 et I_1

On obtient : $I_0 = e-1$ et $I_1 = [t\,Ln\,t - t]_1^e = 1$

2. Pour tout $n \geq 1$, trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1}

Par intégration par parties, on obtient :

$$I_n = \int_1^e 1\times(Ln\,t)^n\,dt = \left[t\,(Ln\,t)^n\right]_1^e - \int_1^e n\,(Ln\,t)^{n-1}dt = e - nI_{n-1}$$

3. Pour tout $n \geq 2$, trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2}

En utilisant la relation précédente, on obtient : $I_n = e - nI_{n-1} = e(1-n) + n(n-1)I_{n-2}$

4. Etudier la convergence de la suite (I_n)

Pour $t \in [1,e]$, $0 < Ln\,t < 1$ et $(Ln\,t)^{n+1} < (Ln\,t)^n$. La suite (I_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle est convergente.

Exercice n° 7

Soit $f : \left]-1,1\right[\to R$ définie par : $f(x) = (x^2 - 1)\, Ln\,(\frac{1+x}{1-x})$

1. Donner un développement limité de *f*, d'ordre 3, au voisinage de 0.

$$f(x) = (x^2-1)\left[Ln(1+x) - Ln(1-x)\right] = (x^2-1)\left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) - (-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3))\right]$$

D'où $f(x) = -2x + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$

2. Montrer que *f* admet une tangente *T* au point d'abscisse 0, donner son équation et la position du graphe de *f* par rapport à *T*.

On a *f'*(0) = - 2. La tangente *T* a pour équation $y = -2x$ et $y + 2x = +\frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$ qui est du signe de *x*.
Si *x*>0, *T* est en dessous de la courbe.
Si *x*<0, *T* est au-dessus de la courbe.

3. On pose $t = 1 - x$, *donc* $t \to 0^+$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{t \to 0^+} t(t-2)\, Ln\left(\frac{2-t}{t}\right) = 0$$

Car $\lim_{t \to 0^+} t\, Ln\, t = 0$