

AVRIL 2013

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Note : l'épreuve est composée d'exercices indépendants qui peuvent être traités dans un ordre indifférent.

Exercice 1 (4 points)

Résoudre dans l'ensemble des nombres réels chacune des équations suivantes, où \ln désigne le logarithme népérien :

1) $\ln(x + 4) = \ln(6 - 2x)$

2) $\ln(3x + 5) + \ln(x - 2) = \ln 3$

3) $(\ln x)^2 - 4\ln x \geq 5$

4) $e^{2x} - 5e^x + 4 = 0$

Exercice 2 (4 points)

Dans une population, il y a 50% d'hommes et 50% de femmes. On suppose que la population est suffisamment importante pour que le fait d'enlever quelques individus ne modifie pas sa structure. On choisit au hasard un échantillon de 10 personnes.

1) Donner la probabilité des événements suivants :

A = « Il y a exactement 8 femmes parmi les 10 personnes »

B = « Il y a au moins 8 femmes parmi les 10 personnes »

2) Donner le nombre n minimum de personnes qu'il faut dans l'échantillon pour que la probabilité qu'il y ait au moins un homme parmi les n personnes soit supérieure à 0,999

Exercice 3 (8 points)

Partie A - Construction d'une suite de nombre réels convergeant vers $\sqrt{2}$

- 1) Vérifier que $\sqrt{2} - 1$ est solution de l'équation $x = \frac{1}{2+x}$
- 2) Représenter graphiquement la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \frac{1}{2+x}$

Soit la suite (u_n) définie par
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2+u_n} \end{cases}$$

- 3) Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n \in [0,1]$
- 4) Montrer que pour tout entier naturel n ,

$$|u_{n+1} - (\sqrt{2} - 1)| = \frac{1}{(1 + \sqrt{2})(2 + u_n)} |u_n - (\sqrt{2} - 1)|$$

- 5) En déduire que pour tout entier naturel n , $|u_{n+1} - (\sqrt{2} - 1)| \leq \frac{1}{4} |u_n - (\sqrt{2} - 1)|$ puis que pour tout entier naturel n , $|u_{n+1} - (\sqrt{2} - 1)| \leq \frac{1}{4^n}$
- 6) Quelle est la limite de la suite $(u_n + 1)$?

Partie B - Propriétés de la suite (u_n)

- 1) Calculer u_n pour les valeurs 1, 2, 3, 4, 5 de n
- 2) Montrer que pour tout entier naturel n , u_n est un nombre rationnel
- 3) Montrer que la suite (u_{2n}) est croissante et que la suite (u_{2n+1}) est décroissante
- 4) On pose, pour $n \geq 1$, $u_n = \frac{p_n}{q_n}$ où p_n et q_n sont des entiers naturels premiers entre eux (Rappel : deux nombres p et q sont premiers entre eux s'il existe deux nombres entiers c et d tels que $cp + dq = 1$). Sachant que $p_0 = 0$ et $q_0 = 1$:
 - a) Montrer que si a et b sont premiers entre eux alors b et $a+2b$ sont aussi premiers entre eux. Cela revient à montrer qu'il existe deux nombres entiers u' et v' tels que $(a+2b)u' + bv' = 1$ sachant qu'il existe deux nombres entiers u et v tels que $au + bv = 1$
 - b) En déduire que pour tout entier naturel n , $p_{n+1} = q_n$ et $q_{n+1} = 2q_n + p_n$
 - c) Calculer q_n en fonction de n

Exercice 4 (4 points)

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

- 1) Montrer que f admet une fonction réciproque sur \mathbb{R}
- 2) Donner un développement limité de f^{-1} à l'ordre 3 en 0

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2013

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

Selon plusieurs études parues récemment (provenant notamment de l'Institut pour la finance internationale et du cabinet de conseil McKinsey), la croissance en Afrique repose sur de solides bases, et le secteur de la consommation et des services devrait voir son chiffre d'affaires exploser dans les années à venir.

Vous apporterez un point de vue critique à cette affirmation.

Sujet n° 2

« L'économie africaine, pour l'essentiel, repose sur les femmes » indiquait Alpha Condé, le président de la Guinée, lors d'un entretien au journal Le Monde en janvier 2012. Développez cette affirmation et prolongez votre exposé sur le rôle des femmes africaines dans d'autres domaines.

Sujet n° 3

La célèbre formule d'Abraham Lincoln (16ème président des Etats Unis de 1860 à 1865) « la démocratie est le gouvernement du peuple, par le peuple, pour le peuple » est-elle une définition encore possible est réalisable ?

AVRIL 2013

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

ÉCONOMIE

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Le candidat traitera au choix l'un des deux sujets suivants.

Sujet n° 1

Comment lutter contre le chômage dans un contexte de mondialisation ?

Sujet n° 2

MICROECONOMIE (10 points)

I - L'offre de travail (6 points)

Soit un consommateur dont les préférences sont représentées par la fonction d'utilité :

$$U(l, q) = l^{2/3} q^{2/3}$$

où l désigne la quantité de loisir et q la quantité de bien consommé.

Le temps disponible de ce consommateur est de 24h, soit $T = 24$.

Soient s le salaire et p le prix du bien de consommation.

- 1) Donnez l'équation de la contrainte budgétaire. Tracez cette contrainte ainsi que le vecteur de prix et interprétez.
- 2) Donnez le taux marginal de substitution du consommateur et interprétez.
- 3) Calculez son choix optimal de concurrence parfaite et représentez le graphiquement sur le schéma précédent. Décrivez de manière littéraire l'arbitrage auquel se livre le consommateur. Donnez son offre de travail optimale. Interprétez.

4) Supposons désormais que le salaire s baisse, p restant constant. Décrivez – sans calcul – l’effet de ce changement sur le choix optimal du consommateur (vous décomposerez notamment cet effet en effet revenu et effet substitution). Que peut-on dire de la forme de sa fonction d’offre de travail ?

5) Supposons désormais que ce consommateur dispose d’une dotation de survie notée q_0 . Tracez, sur un nouveau schéma, son ensemble de consommations possibles. Qu’est-ce alors que le salaire de réserve ?

6) Quelle hypothèse implicite fait-on quand on suppose que l’offre de travail est une fonction croissante du salaire réel ? Quelle représentation du fonctionnement du marché du travail soutient cette théorie ?

II - Le producteur (4 points)

Soit un producteur en concurrence parfaite dont la fonction de production est :

$$f(k, l) = k^{1/3} l^{2/3}$$

Notons p , le prix de l’output et p_1, s les prix respectifs des deux inputs k et l .

1) Quelle est la nature des rendements d’échelle ? Interprétez. Est-ce conforme aux hypothèses usuelles ?

2) Après avoir rappelé sa définition, calculez et interprétez le taux marginal de substitution technique.

3) Calculez alors ses demandes optimales d’inputs en fonction des prix. Comment interpréter un tel résultat ? Que peut-on en déduire quand à l’offre d’output de ce producteur ?

MACROECONOMIE (4 points)

Une entreprise doit choisir d’investir $I_0 = 100$ en biens d’équipement et dispose pour cela de fonds propres. Le taux d’intérêt noté r est à 5%.

Le rendement de cet investissement sur deux ans est de 150 la première année et de 100 la seconde année. L’investissement ne peut être revendu ultérieurement.

1) Après avoir rappelé sa définition, donnez la valeur actuelle nette de l’investissement. L’entreprise choisit-elle d’investir ? Comment réagit alors l’investissement à une variation du taux d’intérêt ? Quelle relation en déduire entre taux d’intérêt et investissement ?

2) Après avoir rappelé sa définition, donnez le taux de rendement interne de l’investissement. Interprétez. Quels sont alors les déterminants de l’investissement ?

3) Que se passe-t-il si l'entreprise ne dispose pas de fonds propres mais doit emprunter pour réaliser cet investissement ?

4) Quel est le lien entre le taux de rendement interne et l'efficacité marginale du capital chez Keynes. Pourquoi celle-ci est instable et «psychologique» selon Keynes ?

QUESTIONS (6 points)

I) Rappelez la définition d'un bien collectif. Quels enjeux soulève cette notion en termes de politique publique ?

II) Qu'est-ce que la loi de J. B. Say ? Quels sont les enjeux d'une telle loi ?

III) Qu'est-ce que l'effet de cliquet dans la consommation ?

AVRIL 2013

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

(Durée de l'épreuve : 2 heures)

***Note :** La note finale tiendra compte, de façon non négligeable, des commentaires donnés après chaque résultat.*

Le Produit Intérieur Brut (*PIB*) est une mesure de l'activité économique, mais il est souvent utilisé pour comparer les pays en terme de développement et de niveau de richesse. Cependant il ne prend pas en compte des dimensions non économiques (éducation, santé, ...), pourtant importantes en terme de progrès et de bien-être. Au début des années 1990, la Banque Mondiale a proposé un Indicateur de Développement Humain (*IDH*) qui tient compte non seulement du développement économique (mesuré par le *PIB*) mais également de l'espérance de vie (*vie*) et de l'accès à l'éducation (*éducation*).

Cet indicateur est la moyenne arithmétique des indices utilisés pour mesurer les niveaux atteints dans chaque dimension, soit : $IDH = \frac{1}{3} I_{PIB} + \frac{1}{3} I_{vie} + \frac{1}{3} I_{éducation}$.

Question 1 – Indices dimensionnels

Sur chaque dimension, des valeurs minimales et maximales sont définies afin d'obtenir des indices compris entre 0 et 1. Les valeurs maximales sont les valeurs les plus élevées observées au cours de la période considérée (1980-2011). Les valeurs minimales sont celles que l'on est en droit de considérer comme des valeurs de subsistance. Il a été défini les valeurs minimales suivantes : 20 ans pour l'espérance de vie, zéro pour les deux variables relatives à l'éducation (durée moyenne de scolarisation, durée attendue de scolarisation) et 100 dollars PPA (Parité de Pouvoir d'Achat) pour le revenu national brut (*RNB*) par habitant.

Valeurs extrêmes de l'indice de développement humain pour ce rapport

Indicateurs	Valeur maximale observée	Valeur minimale
Espérance de vie à la naissance	83,4 (Japon, 2011)	20,0
Durée moyenne de scolarisation	13,1 (République tchèque, 2005)	0
Durée attendue de scolarisation	18,0 (limitée)	0
Indice combiné de l'éducation	0,978 (Nouvelle-Zélande, 2010)	0
Revenu national brut par habitant (en PPA en \$)	107,721 (Qatar, 2011)	100

Une fois définies les valeurs minimales et maximales, les indices dimensionnels se calculent de la manière suivante :

$$I_{\text{indice dimensionnel}} = \frac{\text{valeur réelle} - \text{valeur minimale}}{\text{valeur maximale} - \text{valeur minimale}} \quad (1)$$

Pour le développement économique, on utilise une échelle logarithmique.

Pour l'éducation, l'équation (1) est utilisée pour chacune des deux composantes, puis nous appliquons de nouveau l'équation (1) à la moyenne géométrique des deux indices obtenus précédemment, en utilisant 0 comme valeur minimale et, comme valeur maximale, la valeur la plus élevée des moyennes géométriques des indices obtenus pour la période considérée.

En résumé, les indices dimensionnels s'obtiennent par les formules suivantes :

$$I_{PIB} = \frac{\ln(RNB) - \ln(100)}{\ln(107721) - \ln(100)} \text{ où } \ln \text{ désigne le logarithme népérien}$$

$$I_{vie} = \frac{\text{valeur réelle du pays} - 20}{83,4 - 20}$$

$$I_1 = \text{Indice de la durée moyenne de scolarisation} = \frac{\text{valeur réelle du pays} - 0}{13,1 - 0}$$

$$I_2 = \text{Indice de la durée attendue de scolarisation} = \frac{\text{valeur réelle du pays} - 0}{18 - 0}$$

$$I_{\text{éducation}} = \frac{\sqrt{I_1 I_2} - 0}{0,978 - 0}$$

- Calculer I_{PIB} en 2011, respectivement pour le Cameroun et le Mali avec les données suivantes de *RNB (PIB/hab)* en 2011 : Cameroun = 2 031 ; Mali = 1 123
- Calculer I_{vie} en 2011, respectivement pour la Cameroun et le Sénégal, sachant que l'espérance de vie à la naissance était de 51,6 ans pour le Cameroun en 2011 et de 59,3 ans au Sénégal
- Calculer $I_{\text{éducation}}$ en 2011, respectivement pour le Cameroun et le Niger, sachant que la durée moyenne de scolarisation était de 5,9 ans pour le Cameroun en 2011 et de 1,4 ans pour le Niger et que la durée attendue de scolarisation était de 10,3 ans pour le Cameroun en 2011 et de 4,9 ans pour le Niger.

Question 2 – Commentaires sur les indices multidimensionnels

- A partir des résultats obtenus à la question 1, compléter le tableau 1 ci-dessous que vous recopierez dans votre copie.

Tableau 1

	Cameroun	Mali	Niger	Sénégal
I_{PIB}			0,266	0,406
I_{vie}		0,588	0,650	
$I_{\text{éducation}}$		0,272		0,387

- Commenter les résultats des indicateurs inscrits dans le tableau 1

Question 3 – Indice *IDH*

Le tableau 2 ci-dessous fournit pour quelques pays les composantes de l'*IDH*. Calculer l'*IDH* de chacun des pays.

Tableau 2

Pays	Espérance de vie à la naissance (en années)	Durée moyenne de scolarisation (en années)	Durée attendue de scolarisation (en années)	<i>PIB</i> /hab (en dollars et en PPA)
Cameroun	51,6	5,9	10,3	2 031
Mali	51,4	2,0	8,3	1 123
Niger	54,7	1,4	4,9	641
Sénégal	59,3	4,5	7,5	1 708

Question 4 – Corrélation *IDH/PIB*

Le tableau 3 ci-dessous fournit pour quelques pays le niveau du *PIB* par habitant et la valeur de l'*IDH*.

Tableau 3

Pays	<i>PIB</i> /hab	<i>IDH</i>
Belgique	33 357	0,886
Bénin	1 364	0,427
Brésil	10 162	0,718
Chine	7 476	0,687
Côte d'Ivoire	1 387	0,400
Etats-Unis	43 017	0,910
France	30 462	0,884
Japon	32 295	0,901
Qatar	107 721	0,831
Fédération de Russie	14 561	0,755

- a) Commenter ces résultats
- b) On donne les éléments suivants : Moyenne(*PIB*/hab)=28 180 ; Moyenne(*IDH*)=0,740 ;
Variance(*PIB*/hab)= 897 159 313 ; Variance(*IDH*)= 0,03222409 ;
Covariance(*PIB*/hab; *IDH*)=3 030.

Rappeler la définition du coefficient de détermination (R^2) et faites le calcul sur ces 10 pays. Commenter le résultat obtenu. Ces commentaires auraient-ils été différents si les données du Qatar ne figuraient pas dans le tableau 3 ? Expliciter