AVRIL 2012

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Exercice 1

1. a. L'enfant peut obtenir 0, 1, 2 ou 3 boules rouges. Le nombre de cas possibles pour tirer 3 boules rouges est $C_3^{13} = 286$

$$P(X = 0) = \frac{C_3^3}{C_3^{13}} = \frac{1}{286}$$
$$P(X = 1) = \frac{C_2^3 C_1^{10}}{C_3^{13}} = \frac{30}{286}$$
$$P(X = 2) = \frac{C_1^3 C_2^{10}}{C_3^{13}} = \frac{135}{286}$$
$$P(X = 3) = \frac{C_3^{10}}{C_3^{13}} = \frac{120}{286}$$

1. b. $E(X) = \sum x_i P(X = x_i) = \dfrac{30}{13}$

2. a.

$$P(R) = P(R \cap A_1) + P(R \cap A_2)$$
$$P(R) = P(A_1) \times P_{A_1}(R) + P(A_2) \times P_{A_2}(R)$$
$$P(R) = \frac{109}{182}$$

2. b. Il s'agit d'une probabilité conditionnelle $P_R(A_1) = \dfrac{P(R \cap A_1)}{p(R)} = \dfrac{70}{109}$

3.a. Il faut s'intéresser à l'événement contraire « ne jamais prendre de bille rouge » au cours de n tirages, dont la probabilité est $\left(1 - \dfrac{109}{182}\right)^n = \left(\dfrac{73}{182}\right)^n$

Donc $p_n = 1 - \left(\dfrac{73}{182}\right)^n$

3. b. En résolvant, on aboutit à n doit être supérieur ou égal à ln(0,01) divisé par ln(73/182), ce qui donne n supérieur ou égal à 5,04.

La plus petite valeur pour laquelle p_n est supérieure à 99% est donc $n = 6$.

<u>Excercice 2</u>

Partie A

1. On montre que la limite de f en 0 est $-\infty$ et que celle en $+\infty$ est $+\infty$. En calculant la dérivée de f, on montre que f est strictement croissante sur son intervalle de définition. Le graphe n'est pas reproduit ici (il admet une branche parabolique dans la direction $y = x$).

2. a. la fonction f est continue, strictement croissante sur son intervalle de définition, donc $f(x) = n$ n'admet qu'une seule solution (théorème de cours)

2. b. $\alpha_1 = 1$

2. c. Par définition $f(\alpha_n) = n$ et $f(\alpha_{n+1}) = n+1$, comme n est plus petit que n+1, on a $f(\alpha_n) < f(\alpha_{n+1})$

la fonction f étant strictement croissante, on en déduit que la suite α_n est strictement croissante

3. a. Une équation de la tangente Δ à la courbe Γ au point A est :

$$y = f'(1)(x-1)+f(1) = 2x-1$$

3. b. En étudiant la fonction h en calculant ses limites et sa dérivée, on observe que h est croissante sur l'intervalle 0,1 et décroissante entre 1 et l'infini. Et $h(1) = 0$.

3. c. La position est déterminée par le signe de $f(x)$ - $(2x-1)$ qui est égal à $h(x)$. Or, $h(x)$ est toujours négative (cf. question précédente), donc Γ est au dessous de Δ .

4. En utilisant le fait que la fonction h est négative et la définition de α_n, on a le résultat attendu. On en déduit que la limite de α_n est + l'infini.

Partie B

1. Une suite est majorée s'il existe un réel M supérieur à tous les termes de la suite. Une suite n'est pas majorée si, pour tout réel M, il existe au moins un terme de la suite qui est strictement supérieur à M.

On considère une suite (u_n) croissante et non majorée. On veut montrer que, pour tout réel A, il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont supérieurs à A.

Puisque (u_n) n'est pas majorée, pour tout réel A, il existe au moins un terme de la suite qui est strictement supérieur à A. On note n_0 le rang de ce terme et on a $u_{n_0} > A$. La suite est croissante, donc, pour tout entier $n \geq n_0$, on a $u_n \geq u_{n_0} > A$

A partir du rang n_0, tous les termes de la suite sont donc supérieurs à A. Cette propriété étant vraie pour tout réel A, la suite (u_n) tend donc vers + l'infini.

2. On raisonne par l'absurde pour montrer que la suite (β_n)n'est pas majorée. On la suppose donc majorée. Cette suite étant majorée et croissante, elle converge vers une limite *m*. La fonction *g* étant continue, la suite $(g(\beta_n))$ converge vers $g(m)$.

Or, on a par ailleurs $\lim\limits_{n \to +\infty} g(\beta_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, donc la suite$(g(\beta_n))$ne converge pas. Cela signifie que l'hypothèse selon laquelle la suite (β_n) est majorée est fausse.

La suite (β_n) n'est pas majorée, elle est croissante. D'après la question précédente, elle converge donc vers + l'infini.

<u>Exercice 3</u>

1. a. On montre facilement que $v_{n+1} = \frac{1}{6} v_n$

1. b. Comme la suite v_n est une suite géométrique, on a $v_n = v_1 \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$ avec v_1 = 1/10, on en déduit que : $u_n = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{2}{5}$

2. a. On trouve a_1 = 1/2

2. b. En construisant un arbre des possibilités, on trouve r_1 = 7/12

2. c. En utilisant la remarque qui est évidente compte tenu que l'événement R_n peut se produire avec le dé A ou le dé B, et en notant que les évènements $(R_n \cap A_n)$ et $(R_n \cap \overline{A_n})$ sont incompatibles, on a :

$$r_n = P(R_n) = P(R_n \cap A_n) + P(R_n \cap \overline{A_n}) = a_n \frac{1}{2} + (1 - a_n)\frac{2}{3} = -\frac{1}{6} a_n + \frac{2}{3}$$

2. d.Le dé A est utilisé à la *n*+1 ème partie dans deux cas :

- si on l'a utilisé à la $n^{\text{ème}}$ partie et que l'on a obtenu rouge (événement $(A_n \cap R_n)$);
- si on a utilisé le dé B à la $n^{\text{ème}}$ partie et que l'on a obtenu blanc (événement $(\overline{A}_n \cap \overline{R_n})$).

2. e. En procédant de la même façon qu'à la question 2c, on montre que $n \geq 1, a_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{3}$.

Il s'agit de la même suite que la suite traitée à la question 1, donc $a_n = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{2}{5}$

2. f. En utilisant les questions 2c et 2e, on obtient $r_n = -\frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{3}{5}$ qui a pour limite 3/5

<u>Exercice 4</u>

u_n peut s'écrire $u_n = \frac{(1-a)n+1}{\sqrt{n^4+n+1}+\sqrt{n^4+an}}$, ce qui montre qu'à partir d'un certain rang, on obtient une série à termes positifs.

En effectuant un développement limité, on a $u_n = \frac{1-a}{2n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

En utilisant la règle de Riemann, la série diverge si *a* est différent de 1 et converge dans le cas *a* = 1.

<u>Exercice 5</u>

1. On recherche les valeurs propres de *p* qui sont 0 et 1 en utilisant le fait $p^2 = p$. Le sous espace vectoriel engendré par la valeur propre 0 est Ker *p* et le sous espace vectoriel engendré par la valeur propre 1 est Im *p*. Comme Ker *p* et Im *p* sont des espaces supplémentaires (on trouvera une démonstration dans les annales du concours ITS voie B Option Economie de l'année 2003), *p* est diagonalisable.

2. a. évident

2. b. On déduit de la question 2a que $f(f-\lambda Id)(f-\mu Id)=0$, Id étant la fonction identité. Donc, les valeurs propres sont $0, \lambda, \mu$

- Si $0 = \lambda = \mu$, *f* est la fonction nulle ;
- Si $0 \neq \lambda \neq \mu$, *f* est diagonalisable ;
- Si $\lambda = 0, \mu \neq 0$, on a $v^2=v$ donc *v* est un projecteur donc *f* est diagonalisable ;
- Si $\lambda \neq 0, \mu = 0$, on a $u^2=u$ donc *u* est un projecteur donc *f* est diagonalisable ;
- Si $\lambda = \mu \neq 0$, on a $(u+v)^2=u+v$ donc $u+v$ est un projecteur donc *f* est diagonalisable.

AVRIL 2012

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

CORRIGÉ DE L'ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

1. a. $\left(\frac{688843}{82981}\right)^{1/28} = 1{,}0785$ soit 7,85% par an de croissance

1. b. $\left(\frac{346119}{23393}\right)^{1/28} = 1{,}1010$ soit 10,10% par an de croissance

1. c. $\left(\frac{252804}{16479}\right)^{1/28} = 1{,}1024$ soit 10,24% par an de croissance

1. d. Les taux de croissance du commerce extérieur (exportations et importations) vont plus vite que la croissance du PIB. Les exportations ont une progression plus forte que les importations.

2. a.

Part dans le PIB des	1980	2008
Importations	28,2%	50,2%
Exportations	19,9%	36,7%

2. b. Le solde du commerce extérieur est négatif. La montée en puissance des échanges extérieurs au cours de la période étudiée est évidente : les importations représentant plus de la moitié du PIB.

3. a. Taux de croissance annuel moyen du PIB par période :

Période 1980/1985 : 11,63%
Période 1985/1990 : 10,57%
Période 1990/1995 : 5,96%
Période 1995/2000 : 4,38%
Période 2000/2005 : 6,05%
Période 2005/2008 : 9,29%

3. b. On observe un ralentissement économique sur la décennie 1990/2000 et une reprise forte de la croissance les 3 dernières années étudiées.

4.

Année	Solde commercial	Part dans le PIB
1980	- 6914	8,3%
1990	- 13045	5,4%
2000	- 21121	5,4%
2005	- 29558	5,6%
2008	- 93315	13,5%

Le déficit est constant mais sa part dans le PIB a longtemps été autour de 5 et 6% alors qu'il a beaucoup progressé en 2008.

5. a.

Année	Part dans le PIB
1980	25,4%
1990	25,0%
2000	26,0%
2008	33,1%

5. b. La part de l'investissement est assez stable au fil du temps.

6. a.

Période	Croissance moyenne annuelle en volume du PIB
1980/1985	4,11%
1985/1990	5,12%
1990/1995	1,54%
1995/2000	4,16%
2000/2005	4,98%
2005/2008	5,33%

6. b. A l'exception de la période 1990/1995, le Maroc est sur une croissance en volume voisine de 5% l'an. Au sujet de cette période 1990/1995, on observait une croissance moyenne annuelle du PIB de 5,96% l'an (question 3) alors qu'en volume, la croissance n'est que 1,54%. L'effet « prix » était donc bien plus fort que l'effet « volume ». D'ailleurs, on peut constater que l'inflation a été forte jusqu'aux années 1995. Elle a été presque complètement maitrisée jusqu'aux années 2005 puisque les taux en volume sont proches des taux de croissance du PIB. Mais l'inflation repart depuis 2005.

7. En prix courants, le PIB a cru de 11,78% entre 2007 et 2008 (688843/616254-1). En prix constants, il a cru de 5,58% (584890/553959-1).

L'inflation se calcule avec la formule 1,1178 = 1,0558 (1 + inflation) soit une inflation de 5,87%.