AVRIL 2012

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CORRIGE DE LA 1ère COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Exercice n° 1

1. Calculer, en $x=1$, la dérivée de : $x^2\ Ln(x+e^x)$

$$f'(x)=2xLn(x+e^x)+\frac{x^2(1+e^x)}{x+e^x} \quad f'(1)=2Ln(1+e\ )+\frac{(1+e\ )}{1+e}=2Ln(1+e)+1$$

2. Calculer $I=\int_0^{\pi/2}(x+1)\sin x\,dx=\left[-(x+1)\cos x\right]_0^{\pi/2}+\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx=2$

3. Résoudre l’équation : $e^{2x}+e^x-2=0$

En posant $X=e^x$, on obtient : x=0.

4. Trouver la primitive de $\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}$.

$F(x)=\frac{2}{3}\sqrt{1+x^3}+k$ et $F(1)=\frac{2}{3}\sqrt{2}+k=0$, d’où $k=-\frac{2}{3}\sqrt{2}$

5. Résoudre l’inéquation : $6x^2-x-1<0$

$x^2-x-1=6\ (x-1/2)(x+1/3)$, donc $x\in\left]-\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right[$

6. On considère 5 entreprises dont les dépenses mensuelles en eau au cours des deux derniers mois sont présentées dans le tableau suivant :

3	4
1	1
2	5
1	3
2	1

Calculer le barycentre de ces données.

$$g = (\frac{9}{5}, \frac{14}{5})$$

7. Dans le secteur du commerce de gros, la moyenne du chiffre d'affaires des petites entreprises est de 100, la moyenne du chiffre d'affaires des moyennes entreprises est de 300 et celle des grandes de 800. Sachant que les petites entreprises représentent la moitié du total des entreprises et que les grandes entreprises ne représentent que 10% du total, quelle est la moyenne du chiffre d'affaires pour l'ensemble des entreprises ?

La moyenne est égale à : $(0{,}5 \times 100) + (0{,}4 \times 300) + (0{,}1 \times 800) = 250$

8. Calculer $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$

$$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0$$

9. Résoudre dans l'ensemble des nombres réels, l'équation : $x^n = 1$ pour $n = 3$ et 4

Pour n=3, x=1,

Pour n=4, x=1 ou -1

10. Déterminer la limite de la suite $(U_n)_{n \in N}$ définie par récurrence : $U_{n+1} = \frac{U_n}{4}$ et $U_1 = 1$

$U_{n+1} = \frac{1}{4^n}$ et cette suite converge vers 0.

Exercice n° 2

Pour tout nombre réel t, on considère la fonction numérique F_t définie par :

$$F_t\ (x) = \frac{e^{(1+t)x} - 1}{e^x - 1}$$

1. Montrer que F_t se prolonge par continuité en 0, et que le fonction prolongée, notée encore F_t, est dérivable en 0. Que valent $F_t\ (0)$ et $F_t^{'}\ (0)$?

$$\lim_{x \to 0} F_t(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1 + (1+t)x - 1}{1 = x - 1} = 1 + t \text{ et } F_t(0) = 1 + t$$

$$F'_t(0) = \lim_{x \to 0} \frac{F_t(x) - F_t(0)}{x} = \frac{1}{2}(t + t^2)$$, sachant qu'au voisinage de 0 : $e^u \approx 1 + u + u^2 / 2$

2. On suppose que F_t admet un développement limité en 0 à tout ordre p, et l'on pose

$$F_t\ (x) = 1 + \varphi_0(t) + \frac{\varphi_1(t)}{1!}x + \frac{\varphi_2(t)}{2!}x^2 + ... + \frac{\varphi_p(t)}{p!}x^p + x^p\ \varepsilon(t)$$

Donner les valeurs de φ_0 et φ_1.

Avec ce qui précède : $\varphi_0(t) = t$ et $\varphi_1(t) = (t + t^2)/2$

Exercice n° 3

On considère la fonction numérique f_a définie par :

$$f_a(x) = -ax + Ln(x)$$

où Ln désigne le logarithme népérien et a est un réel strictement positif.

1. Déterminer, selon les valeurs de a, le nombre de racines de l'équation $f_a(x) = 0$.

$f_a^{'}(x) = 0$ pour $x = 1/a$.

Si $a < 1/e$, alors l'équation admet deux racines,

Si $a = 1/e$, alors l'équation admet une racine,

Si $a > 1/e$, alors l'équation n'admet aucune racine.

2. Donner l'allure du graphe de $f_{1/2}$.

$f_{1/2}$ est croissante jusqu'au maximum atteint en 2, puis décroissante, avec une branche parabolique dans la direction $y = -ax$.

3. Calculer l'aire comprise entre le graphe de $f_{1/2}$, l'axe des abscisses, les droites x=1 et x=2.

$$I = \int_2^1 (-ax + Lnx)\ dx = \left[-ax^2/2 + xLnx - x\right]_2^1 = 7/4 - 2\ln 2$$

4. Montrer que pour tout $\alpha \in]0,1[$, et tout $x, t > 0$, on a : $f_a(\alpha\, x + (1-\alpha)t) \geq \alpha\ f_a(x) + (1-\alpha)\, f_a(t)$

$f_a^{''}(x) = -1/x^2$ et f est concave.

5. Etudier, selon les valeurs de a, la convergence de la suite (u_n) définie par : $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = au_n$.

On aune suite géométrique :

Si $a < 1$, la suite est convergente vers 0,

Si $a = 1$, la suite est stationnaire égale à u_0,

Si $a > 1$, la suite est divergente.

Exercice n° 4

Pour tout entier naturel strictement positif n, on pose : $I_n(x) = \int_0^x \frac{t^n - 1}{t+1} dt$

1. Calculer $I_1(x)$ et $I_2(x)$

On obtient : $I_1(x) = x - 2Ln(x+1)$ et $I_2(x) = \frac{x^2}{2} - x$

2. Calculer $I_3(x)$

On obtient : $I_3(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} + x - 2Ln(x+1)$

3. Etudier les variations de $I_1(x)$ et tracer son graphe.

Sa dérivée est égale à : $\dfrac{x-1}{x+1}$ qui est nulle pour x=1. La fonction est décroissante de $-\infty$ à 1 puis croissante. Son minimum est égal à $1-2Ln2$.

4. Calculer $J_1 = \int_0^1 I_1(x)\,dx$

$$J_1 = \int_0^1 I_1(x)\,dx = \int_0^1 (x-2Ln(x+1)\,dx = \tfrac{1}{2} - 2\big[(x+1)Ln(x+1)-(x+1)\big]_0^1 = \frac{5}{2} - 4Ln2$$

Exercice n° 5

Soit $M(x,y)$ un point du plan où $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$.

On pose $D = \{(x,y) \in R^2 / x^2 + y^2 \le 1\}$.

On tire aléatoirement un point M (x, y). Quelle est la probabilité que le point M appartienne au domaine D ?

La probabilité est égale au rapport des deux surfaces : la partie du disque dans le carré et le carré, soit : $\pi/4$

Exercice n° 6

On définit, pour tout entier $n \in N$, l'intégrale :

$$I(n) = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\,dt$$

1. Calculer $I(0), I(1), I(2)$

On obtient $I(0) = \pi/2, I(1) = 1, I(2) = \pi/4$

2. En effectuant une intégration par parties, établir une relation entre $I(n)$ et $I(n-2)$

On obtient : $I(n) = \dfrac{n-1}{n} I(n-2)$

3. Etudier la monotonie de la suite $I(n)$

On calcule $I(n+1) - I(n) = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)(\cos t - 1)\,dt \le 0$. La suite est donc décroissante et de plus positive, donc convergente vers l.

4. Calculer $\lim_{n\to\infty} \frac{I(n+1)}{I(n)}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{I(n+1)}{I(n)} = \frac{l}{l} = 1$$

5. Soit $u(n) = (n+1)I(n+1)I(n)$. Calculer $u(0), u(1)$.

$u(0) = u(1) = \pi / 2$

6. Démontrer que, pour tout n, $u(n)$ est égale à une constante que l'on précisera.

$$u(n+1) = (n+2)I(n+2)I(n+1) = (n+2)\times\frac{(n+1)}{(n+2)}I(n)I(n+1) = u(n) = \pi / 2$$

7. Calculer $\lim_{n\to\infty} nI^2(n)$

Comme la suite $I(n)$ est décroissante : $I(n+1) \le I(n) \le I(n-1)$, puis en multipliant par $I(n)$ et n, on obtient : $u(n)\times\frac{n+1}{n} \le nI^2(n) \le u(n-1)$ et par passage à la limite $\lim_{n\to\infty} nI^2(n) = \pi / 2$

8. A l'aide de la relation établie à la question 2, exprimer $I(2p)$ et $I(2p+1)$ en fonction C_{2p}^{p} et de *p*.

On obtient : $I(2p) = \frac{1\times 2....\times(2p-1)}{2\times 4...\div(2p)}\times\frac{\pi}{2} = \frac{\pi\times C_{2p}^{p}}{2\times 4^p}$ et

$$I(2p+1) = \frac{2\times 4....\times(2p)}{3\times 5...\div(2p+1)}\times 1 = \frac{4^p}{(2p+1)\times C_{2p}^{p}}$$

AVRIL 2012

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CORRIGE DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Exercice n° 1

On considère la fonction numérique *f* d'une variable réelle définie par : $f(x) = xe^{x} + 1$.

1. Etudier les variations de *f*.
   La dérivée de *f* est égale à $f^{'}(x) = e^{x}(x+1)$
   La fonction est donc décroissante avant -1, puis croissante.

2. La fonction *f* admet-elle un point d'inflexion ? Si oui, déterminer ce point d'inflexion.
   La dérivée seconde de *f* est égale à $f^{''}(x) = e^{x}(x+2)$ et elle admet un point d'inflexion $(-2, 1-2/e^{-2})$

3. Tracer le graphe de *f*. On a une asymptote horizontale en 1 et une branche parabolique dans la direction Oy .

4. Calculer : $I = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx = 1 + \left[e^{x}x\right]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} e^{x}\,dx = 2/e$.

Exercice n° 2

Pour tout entier naturel n, on pose : $I_n = \int_{1}^{e} x(Lnx)^{n}\,dx$

1. Calculer I_1 et I_2.
   $$I_1 = \int_{1}^{e} x\,Lnx\,dx = \left[\frac{x^2}{2}Lnx\right]_{1}^{e} - \int_{1}^{2}\frac{1}{2}x\,dx = \frac{e^2+1}{4}.$$

2. Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1}.
   Par intégration par parties, on obtient : $I_n = \frac{e^2}{2} - \frac{n}{2}I_{n-1}$, d'où $I_2 = \frac{e^2}{2} - I_1 = \frac{e^2-1}{4}$.

3. Calculer I_3 et I_4. On obtient : $I_3 = \frac{e^2+3}{8}$ et $I_4 = \frac{e^2-3}{4}$.

Exercice n° 3

On considère la suite numérique (u_n) définie, pour n entier naturel, par : $u_n = \dfrac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2}$

1. Etudier la monotonie de la suite (u_n).

   On peut vérifier que $u_n = \dfrac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2} = 1 - \dfrac{1}{(n+2)^2}$. La suite est croissante et majorée par 1, donc elle converge 1 (on peut aussi le voir directement).

2. Soit $v_n = \prod_{k=1}^{n} u_k$, déterminer, si elle existe, la limite de la suite (v_n).

   $$v_n = \prod_{k=1}^{n} u_k = \frac{(2\times 4)\times(3\times 5)....n(n+2)\times(n+1)(n+3)}{3^2\times 4^2....(n+1)^2\times(n+2)^2} = \frac{2}{3}\times\frac{(n+3)}{(n+2)}$$

   et la suite converge vers 2/3.

3. Soit $w_n = Ln(u_n)$.

   - Montrer que la suite (w_n) converge. Comme (u_n) converge vers 1, (w_n) converge vers 0.

4. Soit $t_n = \sum_{k=1}^{n} w_k$. Montrer que la suite (t_n) converge.

$t_n = \sum_{k=1}^{n} w_k = \sum_{k=1}^{n} Ln(u_k) = Ln(\prod_{1}^{n} u_k) = Ln(v_n)$ qui converge vers $Ln(2/3)$.

Exercice n° 4

Pour tout entier naturel strictement positif n, on pose : $I_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin x \, dx$.

1. Calculer I_n. On effectue deux intégrations par parties, en posant chaque fois : $u(x) = e^{-x}$ pour obtenir $I_n = (-1)^n e^{-n\pi} (\dfrac{1+e^{-\pi}}{2})$.

2. Montrer que (I_n) est une suite géométrique et calculer sa limite. On a :

   $\dfrac{I_{n+1}}{I_n} = (-1)e^{-\pi}$, soit une suite géométrique de raison inférieure à 1 en valeur absolue qui converge vers 0.

Exercice n° 5

Dans un terrain rectangulaire de largeur 10 mètres et de longueur 100 mètres, se trouve un étang dont on ne connaît pas la superficie. Pour estimer cette surface, on lance aléatoirement 500 flèches dans le terrain et on constate que 100 flèches sont tombées dans l'étang.

1. Donner une estimation de la surface de l'étang.

   La surface de l'étang est égale à $\frac{(500-400)}{500} \times \text{Surface du terrain} = 200\,m^2$.

2. Comment peut-on améliorer cette estimation ?

   Première possibilité : augmenter le nombre de flèches tirées, mais ceci présente l'inconvénient d'augmenter les coûts.

   Deuxième possibilité : s'assurer que toute la zone est couverte par les flèches, en stratifiant le terrain en rectangles et en envoyant les flèches dans chaque sous rectangle (et sans augmenter le nombre total de flèches).

Exercice n° 6

1. Résoudre le système : $\begin{cases} x - 3y = 2Ln2 \\ x + y = 4Ln2 \end{cases}$

   Pars soustraction des deux lignes, on obtient : $x = \frac{7}{2}Ln2$ et $y = \frac{1}{2}Ln2$.

2. On pose : $I = \int_0^{Ln16} \frac{e^x + 3}{e^x + 4}dx$ et $J = \int_0^{Ln16} \frac{1}{e^x + 4}dx$.

Calculer I et J.

D'après la première question, on est amené à calculer :

$I - 3J = 2Ln2$ et $I + J = 24Ln2$, d'où $I = \frac{7}{2}Ln2$ et $J = \frac{1}{2}Ln2$.

Exercice n° 7

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On note encore f cette fonction prolongée. On a : $|f(x)| \leq x^2$ et *f(x)* tend vers zéro quand *x* tend vers zéro. D'où *f(0)=0.*

2. Etudier la dérivabilité de *f* sur R, ainsi que la continuité de sa fonction dérivée.

   On a : $f'(x) = 2x\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})$ si *x* est non nul et $f'(0) = 0$. La limite de $f'(x)$ n'existe pas quand *x* tend vers zéro, donc *f* n'est pas de classe C^1

3. Résoudre, dans R, l'équation : $f(x) = 0$. On trouve $x = 0$ ou $x = \frac{1}{k\pi}$.