

Avril 2008

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

Corrigé de la 1^{ère} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

E désigne un espace vectoriel complexe de dimension n , ($n \geq 1$).

Partie I

- a. Si μ et ν sont deux valeurs co-propres associées au vecteur co-propre x , alors $(\mu - \nu)x = 0$ ce qui entraîne que $\mu = \nu$.
b. Il est clair que E_μ est un \mathbb{R} -espace vectoriel car $\bar{\lambda} = \lambda$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
c) Soit $x \neq 0$ un vecteur co-propre associée à μ . Nous avons :

$$u(e^{-i\frac{\theta}{2}}x) = e^{i\frac{\theta}{2}}u(x) = e^{i\frac{\theta}{2}}\mu x = e^{i\theta}\mu e^{-i\frac{\theta}{2}}x$$

et donc $e^{-i\frac{\theta}{2}}x$ est un vecteur co-propre pour $e^{i\theta}\mu$.

- d) On en déduit de la question précédente que E_μ n'est pas un \mathbb{C} -espace vectoriel.
e) Pour tout $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on a

$$u \circ v(x + \lambda y) = (u \circ v)(x) + u(\bar{\lambda}v(y)) = (u \circ v)(x) + \lambda(u \circ v)(y),$$

donc $u \circ v$ est linéaire.

Partie II

a. A est la matrice de u dont les vecteurs colonnes sont Ae_i , exprimés dans la base (e_i) . Or $X = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et comme u est semi-linéaire, on a $A\bar{X} = \sum_{i=1}^n x_i Ae_i = Y$, où Y est la matrice colonne associée au vecteur $y = u(x)$.

b. Soient x et y des vecteurs liés par $y = u(x)$. Si X et X' (resp. Y et Y') sont les matrices-colonnes de x (resp. y) dans les bases (e_i) et (f_i) , alors on a les relations suivantes :

1. $Y = A\bar{X}$.

2. $Y' = A\bar{X}'$.

3. $X = SX'$ et $Y = SY'$. Alors $Y = SY' = SB\bar{X}' = SB\overline{S^{-1}X}$, et donc $A = SBS^{-1}$.

c. Si μ est une valeur co-propore associée au vecteur co-propore X alors $-\bar{b} = \mu a$ et $\bar{a} = \mu b$. Comme X n'est pas nul alors $a \neq 0, b \neq 0$ et $\mu \neq 0$. On trouve $|\mu|^2 = -1$, ce qui est impossible. La matrice A n'admet pas de valeurs co-propres.

d. Si A est une matrice réelle qui admet une valeur propre réelle λ , alors elle admet pour cette valeur propre un vecteur propre réel non nul X . Il résulte que $A\bar{X} = AX = \lambda X$. λ est ainsi une valeur co-propre.

Partie III

a. Soit X un vecteur co-propre pour μ . Alors, on a

$$A\bar{A}X = A\overline{AX} = \bar{\mu}A\bar{X} = |\mu|^2 X,$$

On en déduit que $|\mu|^2$ est une valeur propre de $A\bar{A}$.

b. *) Cas $A\bar{X}$ et X sont liés. Il existe donc un complexe μ tels que $A\bar{X} = \mu X$. Alors

$$A\bar{A}X = A(\bar{\mu}X) = |\mu|^2 X = \lambda X.$$

En particulier, il existe $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $|\mu| = \lambda$ et μ est une valeur co-propre de A . La question précédente permet d'affirmer qu'en fait $\sqrt{\lambda}$ est lui-même une valeur co-propre de A .

*) Cas $A\bar{X}$ et X sont indépendants. Alors

$$\begin{aligned} \bar{A}(A\bar{X} - \sqrt{\lambda}X) &= \bar{A}A\bar{X} - \sqrt{\lambda}\bar{A}X \\ &= \lambda\bar{X} - \sqrt{\lambda}\bar{A}X \\ &= -\sqrt{\lambda}(\bar{A}X - \sqrt{\lambda}\bar{X}) \\ &= -\sqrt{\lambda}\overline{(AX - \sqrt{\lambda}X)} \end{aligned}$$

et $-\sqrt{\lambda}$ est une valeur co-propre de A . Donc $\sqrt{\lambda}$ aussi.

c. Découle facilement des deux questions précédentes.

d. Comme T est triangulaire supérieure, $T\bar{T}$ l'est aussi, les coefficients sur la diagonale étant le module au carré des coefficients sur la diagonale de T . Soit λ une valeur propre de T . Comme T est triangulaire supérieure, les valeurs propres se trouvent sur la diagonale, et $|\lambda|^2$ est une valeur propre de $T\bar{T}$. Il en résulte que $|\lambda|$ est valeur co-propre de T . Nous concluons toujours grâce à l.c.

e. Si μ est une valeur co-propre de T , $|\mu|^2$ est une valeur propre de $T\bar{T}$. Comme les valeurs propres de $T\bar{T}$ sont les modules (au carré) des valeurs propres de T , il existe λ un complexe tel que $|\lambda| = |\mu|$, et λ est une valeur propre de T .

f. 1 est valeur co-propre de S , car i est valeur propre de S , et $1 = ie^{-\frac{\pi}{2}i}$. En outre

$$\begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a - ib \\ c - id \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i(a-d) + b + c \\ ic + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + ib \\ c + id \end{pmatrix}$$

Nous résolvons l'équation. Par exemple, le vecteur $X = \begin{pmatrix} 1+i \\ 0 \end{pmatrix}$ est vecteur co-propre pour 1.

g. Soit X une matrice-colonne de taille n , qu'on décompose en $X = U + iV$, où U et V sont réelles. Alors,

$$A\bar{X} = (BU + CV) + i(CU - BV).$$

Si X est un vecteur co-propre associé à μ , on a en particulier : $BU + CV = \mu U$ et $CU - BV = \mu V$.

D'autre part, si on considère la matrice-colonne de taille $2n$, $Y = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$, alors :

$$DY = \begin{pmatrix} BU + CV \\ CU - BV \end{pmatrix}$$

Donc, si X est un vecteur co-propre pour μ relativement à D , Y est vecteur propre pour μ relativement à D . Réciproquement, si μ est valeur propre de D , comme D est réelle, il existe un vecteur propre réel (décomposer n'importe quel vecteur propre en partie réelle/partie imaginaire) Y , qu'on décompose comme ci-dessus. Alors le vecteur $X = U + iV$ est un vecteur co-propre de μ (relativement à D).

Partie IV

1. Un simple calcul montre que $A\bar{A} = PDD\bar{P}^{-1}$, où $D\bar{D}$ est diagonale, ses coefficients étant positifs ou nuls. En outre, nous avons :

$$\text{rg}(A\bar{A}) = \text{rg}(D\bar{D}) = \text{rg}(D) = \text{rg}(A).$$

2. On a

$$B\bar{B} = P^{-1}A\bar{P}\bar{P}^{-1}\bar{A}P = P^{-1}A\bar{A}P = \Lambda.$$

D'autre part

$$\bar{B}B = \bar{P}^{-1}\bar{A}P\bar{P}^{-1}A\bar{P} = \bar{P}^{-1}A\bar{A}\bar{P} = \Lambda$$

Il résulte que $B\bar{B} = \bar{B}B$. Il s'en suit que $B\Lambda = B\bar{B}B = \bar{B}BB = \Lambda B$.

3. Comme B commute avec Λ , le noyau de $\Lambda - \lambda_p I_n$ est stable par B . On peut alors écrire B sous la forme demandée.

4. Du fait que $B\bar{B} = \Lambda$, chaque matrice B_p vérifie que $B_p\bar{B}_p = \lambda_p I_{n_p}$. Si $\lambda_p \neq 0$, on utilise alors le résultat de III.c., appliqué à la matrice $A = \frac{1}{\sqrt{\lambda_p}}B_p$, pour prouver que B_p est co-semblable à une matrice diagonale. Le cas litigieux de $\lambda_k = 0$ se traite de la façon suivante : comme le rang de $A\bar{A}$ vaut le rang de A , le rang de B est celui de Λ . Dans le cas où $\lambda_k = 0$, le rang de Λ est $n_1 + \dots + n_{k-1}$. Le rang de B est $\text{rg}(B_1) + \dots + \text{rg}(B_k)$. Mais le calcul $B_p\bar{B}_p = \lambda_p I_{n_p}$ prouve que pour $p < k$, le rang de B_p est exactement n_p . On trouve donc que le rang de B_k est nul, ou encore que $B_k = 0$. En résumé, pour tout p de 1 à k , il existe des matrices inversibles S_p et des matrices diagonales D_p telles que $B_p = S_p D_p \bar{S}_p^{-1}$. Nous posons alors :

$$P = \begin{pmatrix} S_1 & 0 & \dots & \\ 0 & S_2 & \dots & \\ \vdots & & & \\ 0 & \dots & & S_k \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & \dots & \\ 0 & D_2 & \dots & \\ \vdots & & & \\ 0 & \dots & & D_k \end{pmatrix}$$

Nous avons $B = PD\bar{P}^{-1}$, et donc B est co-diagonalisable. Comme cette notion est invariante par matrice co-semblable, A est aussi co-diagonalisable.

5. Il suffit de constater que les conditions *i*) et *ii*) pour une matrice symétrique réelle sont très faciles à vérifier. Il reste à montrer que le rang de A et A^2 sont les mêmes. Pour cela, constatons que $\text{Ker}(A)$ et $\text{Im}(A)$ sont orthogonaux. En effet, si $x \in \text{Ker}(A)$ et $y = Az$, pour un certain z on a

$$\langle x, y \rangle = \langle x, Az \rangle = \langle Ax, z \rangle = \langle 0, z \rangle = 0.$$

Il résulte que $\text{Ker}(A)$ et $\text{Im}(A)$ sont en somme direct et A est co-diagonalisable.

6. Nous essayons d'appliquer comme dans la question précédente les conditions *i*), *ii*) et *iii*).
On a

$$B\bar{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C\bar{C} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad D\bar{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E\bar{E} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Alors

- B est co-diagonalisable et non diagonalisable.
- C est diagonalisable mais pas co-diagonalisable.
- D est ni diagonalisable ni co-diagonalisable.
- E est diagonalisable et co-diagonalisable.

AVRIL 2008

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ DE LA 2^{ème} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Dans toute cette épreuve, R désigne l'ensemble des nombres réels.

Exercice n° 1

1. Soient $f(x) = \cos x \operatorname{Ln}(\sin x)$ et $g(x) = \cos x \operatorname{Ln}(\operatorname{tg} x)$.

En 0, $\sqrt{x} f(x) \rightarrow 0$ et $f(\pi/2) = 0$, donc f est intégrable sur l'intervalle $]0, \pi/2[$.

En $\pi/2$, on peut prolonger g par continuité en posant $g(\pi/2) = 0$. En 0,

$\sqrt{x} g(x) \rightarrow 0$, donc g est intégrable sur l'intervalle $]0, \pi/2[$.

$$2. \int_0^{\pi/2} \cos x \operatorname{Ln}(\sin x) dx = \int_0^1 \operatorname{Ln} u du, \text{ en posant } u = \sin x,$$

$$\text{et } \int_0^1 \operatorname{Ln} u du = [u \operatorname{Ln} u - u]_0^1 = -1$$

$$3. \int_0^{\pi/2} \cos x \operatorname{Ln}(\operatorname{tg} x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \operatorname{Ln}(1-u^2) du = \frac{1}{2} [- (1-u) \operatorname{Ln}(1-u^2)]_0^1 - \int_0^1 \frac{u}{1+u} du = \operatorname{Ln} 2 - 1$$

Exercice n° 2

Soit la fonction gamma définie par : $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$

1. Au voisinage de 0, $e^{-t} t^{x-1}$ est équivalent à t^{x-1} qui est intégrable pour $x > 0$ et l'intégrale est convergente à $+\infty$. Son domaine de définition est R^{+*} .

2. En effectuant une intégration par parties, on obtient :

$$I_n(x) = \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt = \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

3. $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{n \operatorname{Log}(1-t/n)}$ qui tend vers e^{-t} .

4. $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$ d'après les questions précédentes.

Exercice n° 3

Soit $y(x)$ une fonction de classe C^2 sur R . On considère l'équation différentielle suivante :

$$y''(x) + xy'(x) + 2y(x) = 0 \text{ avec les conditions : } y(0) = 0 \text{ et } y'(0) = -1$$

1. Soit $y(x) = -xe^{-x^2/2}$, $y'(x) = e^{-x^2/2}(x^2 - 1)$, $y''(x) = e^{-x^2/2}(3x - x^3)$ et l'équation différentielle précédente est vérifiée ainsi que les conditions. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle (sans tenir compte des conditions initiales) est un espace vectoriel de dimension 2 et en fixant les deux conditions, on obtient une unique solution.
2. On suppose que f est solution de l'équation

$$f(x) = -1 - \int_0^x (2x-t)f(t) dt$$

$$\text{Alors } f(x) = -1 - \int_0^x 2xf(t) dt + \int_0^x tf(t) dt$$

$$\text{On a } f(0) = -1 \text{ et } f \text{ est dérivable avec } f'(x) = -2 \int_0^x f(t) dt - 2xf(x) + xf(x)$$

La fonction $y: x \rightarrow x \int_0^x f(t) dt$ est donc solution de l'équation différentielle $y''(x) + xy'(x) + 2y(x) = 0$ avec les conditions initiales précédentes. D'après la première question $y(x) = -xe^{-x^2/2}$ et $f(x) = (x^2 - 1)e^{-x^2/2}$

Exercice n° 4

Pour $k > 1$ et $x \in R$ positif, on pose

$$f_k(x) = \frac{((k-1)x+1)^{k/k-1} - kx - 1}{k}$$

et

$$f_k^*(y) = \text{Sup}_{x \in R} (xy - f_k(x))$$

1. Pour $k = 2$, $f_k(x) = \frac{1}{2}x^2$ et $f_k^*(y) = \text{Sup}_y (xy - \frac{1}{2}x^2) = \frac{1}{2}y^2$. Cette borne supérieure est atteinte pour $x = y$.

2. Etude de la convexité de $f_k(x)$. On a : $k f'_k(x) = k((k-1)x+1)^{k/k-1} - 1$. Posons $u = ((k-1)x+1)^{k/k-1} - 1$, on obtient : $u' = ((k-1)x+1)^{-k/k-1} > 0$, la dérivée seconde de $f_k(x)$ étant strictement positive, la fonction est convexe. (Comme $k > 1$ et $x \in \mathbb{R}$ positif, la racine est bien définie).

3. Calcul de $f_k^*(y)$ pour tout $k > 1$. Soit $g(x) = xy - f_k(x)$, alors

$$g'(x) = y - f'_k(x) = 0 \text{ pour } x = \frac{(y+k)^{k-1} - 1}{k-1} \text{ et } f_k^*(y) = \frac{(1+y)^k - ky - 1}{k(k-1)}$$

Exercice n° 5

Soit A une partie non vide de \mathbb{R}^2 et $a \in A$. On pose,

$$T(A, a) = \left\{ u \in \mathbb{R}^2 / \exists (x_n) \in A, \exists \lambda_n > 0, x_n \rightarrow a, \lambda_n(x_n - a) \rightarrow u \right\}$$

- $(0,0) \in T(A, a)$, il suffit de prendre $x_n = a$ et $\lambda_n = 1$.
- Soit $u \in T(A, a)$, $\forall \mu > 0$, $\mu \lambda_n(x_n - a) \rightarrow \mu u$ et $\mu u \in T(A, a)$, donc cet ensemble est stable par homothétie positive.
- Montrons que $T(A, a)$ est un ensemble fermé de \mathbb{R}^2 . Soit u^i une suite de points de $T(A, a)$ et $u = \lim_i u^i$. Comme $u^i \in T(A, a)$, $\exists \lambda_{p_i}^i > 0$, $\exists x_{p_i}^i \in A$, $x_{p_i}^i \rightarrow a$,

$\lambda_{p_i}^i(x_{p_i}^i - a) \rightarrow u^i$. Pour tout n , $\exists k_n > 0$ tel que $|\lambda_{k_n}^n(x_{k_n}^n - a) - u^n| < \frac{1}{n}$ et alors

$x_{k_n}^n \rightarrow a$, $\lambda_{k_n}^n(x_{k_n}^n - a) \rightarrow u$ et $u \in T(A, a)$, ce qui montre que $T(A, a)$ est un ensemble fermé de \mathbb{R}^2 .

4. Montrons que $T(A, a)$ est un ensemble convexe de \mathbb{R}^2 si A est une partie convexe de \mathbb{R}^2 . Soient $u, v \in T(A, a)$ et $0 < \lambda < 1$:

$$\exists (u_n) \in A, \exists \lambda_n > 0, u_n \rightarrow a, \lambda_n(u_n - a) \rightarrow u$$

$$\exists (v_n) \in A, \exists \alpha_n > 0, v_n \rightarrow a, \alpha_n(v_n - a) \rightarrow v \text{ et}$$

$$\lambda \lambda_n(u_n - a) + (1-\lambda)\alpha_n(v_n - a) \rightarrow \lambda u + (1-\lambda)v.$$

Par ailleurs,

$$\lambda \lambda_n(u_n - a) + (1-\lambda)\alpha_n(v_n - a) = (\lambda \lambda_n + (1-\lambda)\alpha_n) \left(\frac{\lambda \lambda_n u_n + (1-\lambda)\alpha_n v_n}{\lambda \lambda_n + (1-\lambda)\alpha_n} - a \right), \text{ ou encore,}$$

$$\lambda \lambda_n(u_n - a) + (1-\lambda)\alpha_n(v_n - a) = \beta_n(w_n - a) \text{ avec}$$

$$\beta_n(w_n - a) \rightarrow \lambda u + (1-\lambda)v,$$

$w_n \in A$, car A est une partie convexe de \mathbb{R}^2 ,

$$w_n = \frac{\lambda \lambda_n u_n + (1-\lambda)\alpha_n v_n}{\lambda \lambda_n + (1-\lambda)\alpha_n} \rightarrow a \quad \text{car } \|w_n - a\| \leq \text{Max}(\|u_n - a\|, \|v_n - a\|).$$

En conclusion $\lambda u + (1 - \lambda)v \in T(A, a)$

5. Soit $A = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, explicitons $T(A, a)$ pour $a = (0, 0)$. On vérifie facilement que $T(A, a) = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$

6. Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0, y \geq x^2, x \geq y^2\}$, explicitons $T(A, a)$ pour $a = (0, 0)$.
Soit $u = (x, y) \in T(A, a)$,
 $\exists (x_n, y_n) \in A, \exists \lambda_n > 0, x_n \geq 0, y_n \geq 0, y_n \geq x_n^2, x_n \geq y_n^2, \lambda_n x_n \rightarrow x, \lambda_n y_n \rightarrow y$

En multipliant par λ_n les inégalités, on obtient :

$y_n \geq x_n^2 \Rightarrow \lambda_n (y_n - x_n^2) \geq 0 \Rightarrow \lambda_n y_n - \lambda_n x_n x_n \geq 0$ et par passage à la limite, $y \geq 0$.
De même, $x \geq 0$. On a donc $T(A, a) \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. Réciproquement, on pose, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, $x_n = x/n, y_n = y/n, \lambda_n = n$ et on vérifie que cette suite (x_n, y_n) appartient à l'ensemble A pour n grand.

Exercice n° 6

On a $u_n = Ln(1 + \sin(\frac{(-1)^n}{n^\alpha})) = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{2n^{2\alpha}} + o(\frac{1}{n^{2\alpha}}) = v_n + w_n$ avec $v_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ et $w_n = -\frac{1}{2n^{2\alpha}} + o(\frac{1}{n^{2\alpha}})$. Ces deux séries de terme général v_n et w_n convergent si et seulement si $2\alpha > 1$, donc la série de terme général u_n converge si et seulement si $\alpha > 1/2$.

Exercice n° 7

Soit $Y = (y_1, \dots, y_n)$ un n-uplet de nombres réels positifs.

1. Le $\text{Min}_{\alpha \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^n (y_i - \alpha)^2$ est atteint pour $\alpha = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$ (il suffit d'annuler la dérivée de cette fonction convexe). La valeur du minimum est égale à $\sum_{i=1}^n y_i^2 - n\bar{Y}^2$, où \bar{Y} est la moyenne des éléments du n-uplet.

2. Soit $X = (x_1, \dots, x_n)$ un autre n-uplet de valeurs positives réelles, trouver le nombre réel a solution du problème de minimisation suivant :

$$\text{Min}_{a \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i)^2 . \text{ On pose } f(a) = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i)^2 , \text{ on obtient}$$

$$f'(a) = -2 \sum_{i=1}^n x_i (y_i - ax_i) \text{ et la dérivée de cette fonction convexe s'annule pour}$$

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} .$$

3. Montrer que $\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \times \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)$. Pour tout réel $\lambda > 0$, $\sum_{i=1}^n (x_i - \lambda y_i)^2 \geq 0$

et donc le discriminant de cette inéquation du second degré est toujours négatif, ce qui donne l'inégalité recherchée.

4. Soit $f(\alpha) = \sum_{i=1}^n (y_i - \alpha)^4$, $f'(\alpha) = -4 \sum_{i=1}^n (y_i - \alpha)^3$, $f''(\alpha) = 12 \sum_{i=1}^n (y_i - \alpha)^2$.

La fonction f est donc strictement convexe et il existe une unique solution au problème de minimisation. L'étude de l'équation $f'(\alpha) = 0$ (regarder le sens de variation de f' et utiliser la question 3), montre d'après le théorème des valeurs intermédiaires, que la solution est strictement positive.

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE CALCUL NUMÉRIQUE

Exercice 1.

On rappelle le critère d'Abel : dans le cas d'une série à terme général v_n à valeurs réelles du type $\forall n \geq n_0 \quad v_n = (-1)^n y_n$ avec $\forall n \geq n_0, \quad y_n \geq 0$, on obtient la convergence de la série $\sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$ si $(y_n)_{n \geq n_0}$ est décroissante et converge vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

1. D'après Abel appliqué 2 fois, ainsi que le fait qu'une somme de 2 séries convergentes est une série convergente, on a $\sum_n w_n$ converge.
2. D'après Abel et les séries de Riemann, ainsi que le fait que la somme d'une série convergente et d'une série divergente est une série divergente, on a $\sum_n u_n$ diverge.
- 3.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{w_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

4. Lorsque 2 séries positives sont équivalentes, elles sont de même nature. Ici nous avons bien 2 séries équivalentes, mais de nature différente, ceci est possible car elles ne sont pas positives.

Exercice 2.

- 1.

$$\begin{cases} u_{2n} = 2n(1 + (-1)^{2n}) \\ u_{2n+1} = (2n+1)(1 + (-1)^{2n+1}) \end{cases} \quad \begin{cases} u_{2n} = 4n \\ u_{2n+1} = 0 \end{cases}$$

2. La limite de la sous-suite impaire est 0 qui est donc une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_n$.
3. Comme la sous-suite paire est de limite $+\infty$, la suite $(u_n)_n$ est divergente.
4. Il est nécessaire que la valeur d'adhérence soit unique et finie pour que la série converge.

Exercice 3.

1. Tous ces graphes sont des graphes de fonctions résolvant le système (*). Ces fonctions sont de la forme y^3 soit sur tout \mathbb{R} soit sur \mathbb{R}^+ soit sur \mathbb{R}^- complété par la fonction identiquement nulle sur les parties complémentaires ou sur tout \mathbb{R} .
2. Le théorème de Cauchy-Lipschitz nous assure en particulier l'unicité de la solution dès lors qu'une condition de Lipschitz est remplie. Hors de ces conditions, il est possible d'avoir plusieurs solutions comme c'est le cas ici.

Exercice 4.

1. (a) Evident car $|\sin(y)| \leq 1$ pour tout y réel.
(b) f est continue sur \mathbb{R}^* . En 0, avec le 1.(a) on a $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. Donc f est continue sur tout \mathbb{R} .
(c) Sur \mathbb{R}^* , f est dérivable comme produit et composée de fonctions dérivables sur tout \mathbb{R} et sur \mathbb{R}^* . De plus

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x \left(\frac{-1}{x^2}\right) \cos\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \cos\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

- (d) La fonction \sin n'admet pas de limite en $+\infty$ et la fonction $x \mapsto \frac{1}{x} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ admet une limite nulle. Donc g n'est pas continue en 0.
(e) Le taux de variation de f en 0 est égal à la fonction g qui n'est pas continue en 0, donc f n'est pas dérivable en 0.
2. (a)

$$\begin{aligned} \{0\} \cup [1; +\infty[\cup \bigcup_{n \geq 1} \left(\left[\frac{1}{4^n}; \frac{2}{4^n} \right[\cup \left[\frac{2}{4^n}; \frac{3}{4^n} \right[\cup \left[\frac{3}{4^n}; \frac{1}{4^{n-1}} \right[\right) &= \{0\} \cup [1; +\infty[\cup \bigcup_{n \geq 1} \left[\frac{1}{4^n}; \frac{1}{4^{n-1}} \right[\\ &= \{0\} \cup [1; +\infty[\cup]0; 1[\\ &= \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

De plus h est définie par parité donc définie sur tout \mathbb{R} .

- (b)
(c) $h\left(\frac{3}{4^n}\right) = 1$. La fonction h est continue (comme fonction affine) sur chacun des intervalles en $\frac{1}{4^n}$ de $]0; 1[$. Il reste à établir la continuité de h en 0, 1 et pour tout n en $\frac{2}{4^n}$ et $\frac{3}{4^n}$, ce qui se fait aisément. La continuité sur les parties négatives s'obtient par parité. h est bien continue sur tout \mathbb{R} .
(d) Sur $\left[\frac{2}{4^n}; \frac{1}{4^{n-1}}\right[$ la graphe de h forme un triangle égal à un demi rectangle de hauteur 1 et de largeur $\frac{2}{4^n}$. On a donc

$$\int_{\frac{2}{4^n}}^{\frac{1}{4^{n-1}}} h(x) dx = \frac{1}{4^n}.$$

Comme h vaut 0 sur $\left[\frac{1}{4^n}; \frac{2}{4^n}\right[$ on a

$$\int_{\frac{2}{4^n}}^{\frac{1}{4^{n-1}}} h(x) dx = \int_{\frac{1}{4^n}}^{\frac{1}{4^{n-1}}} h(x) dx = \frac{1}{4^n}.$$

Enfin

$$\int_{\frac{1}{4^n}}^1 h(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_{\frac{2}{4^k}}^{\frac{1}{4^{k-1}}} h(x) dx = \frac{1 - \frac{1}{4^n}}{3}.$$

(e)

$$\int_0^1 h(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\frac{1}{4^n}}^1 h(x) dx = \frac{1}{3}.$$

(f) h est donc intégrable sur $[0; y]$ pour tout y positif et par parité sur $[y; 0]$ pour tout y négatif.

(g) i. La continuité de h sur \mathbb{R}^* assure la dérivabilité de H pour tout y non nul.

ii. $\forall y > 0$, $H'(y) = h(y)$ et $H'(y) \leq 1$.

iii.

$$H\left(\frac{1}{4^n}\right) = H\left(\frac{2}{4^n}\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{4^k} = \frac{1}{3} \frac{1}{4^n}.$$

iv. Ainsi

$$\mathcal{H}\left(\frac{1}{4^n}\right) = \frac{1}{3}$$

et

$$\mathcal{H}\left(\frac{2}{4^n}\right) = \frac{1}{6}.$$

(h) La fonction \mathcal{H} n'admet donc pas de limite en 0 ce qui prouve que H n'est pas dérivable en 0.