AVRIL 2007

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

**ITS Voie B Option Économie**

**CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES**

## Problème 1

### *Question 1*

a) Soit $p$ le degré de $f_n$

Si $p$ est nul alors $\forall x \in R \qquad f_n(x) - f_n(x-1) = 0 \neq x^n$ donc impossible

Si $p$ est non nul, on pose $a_p x^p$ comme terme de plus haut degré de $f_n$ avec $a_p$ différent de 0

On recherche le terme de plus haut degré de $f_n(x) - f_n(x-1)$ qui est $pa_p x^{p-1}$

On en conclut que $n = p$-1 et que $pa_p = 1$

$f_n$ est donc bien de degré $n$+1

b) D'après (1), on a $f_n(0) - f_n(-1) = 0$, or $f_n(0)=0$ donc $f_n(-1)=0$. la valeur -1 est donc racine de $f_n$, donc $f_n$ est divisible par $x$+1

c) Démonstration par récurrence en utilisant la formule (1)

### *Question 2*

a) En utilisant la formule (1), on a :

$\forall x \in R \qquad f_n'(x) - f_n'(x-1) = nx^{n-1}$

Mais $\quad x^{n-1} = f_{n-1}(x) - f_{n-1}(x-1)$ toujours en utilisant (1)

Donc $\quad f_n'(x) - nf_{n-1}(x) = f_n'(x-1) - nf_{n-1}(x-1)$

Donc $\quad \forall x \in N \quad f_n'(x) - nf_{n-1}(x) = f_n'(0)$

Cette propriété, vraie sur N, est vraie aussi sur R compte tenu que $f_n'(x) - nf_{n-1}(x) - f_n'(0)$ est un polynôme de degré n au plus qui admet un nombre fini de racines.

Pour démontrer (4), il suffit de démontrer que $f_n^{'}(0) = n\int_0^{-1} f_{n-1}(t)dt$ (par intégration de la formule (3) entre 0 et x).
De même, par intégration de la formule (3) entre 0 et -1, on a :
$f_n(-1) = 0 = n\int_0^{-1} f_{n-1}(t)dt - f_n^{'}(0)$, d'où le résultat.

***Question 3***

a) $f_0(x) = x$
$f_1(x) = x(x+1)/2$
$f_2(x) = x(x+1)(2x+1)/6$
$f_3(x) = x^2(x+1)^2/4$

b) $S_1 = \sum_{i=1}^{i=p} i = \dfrac{p(p+1)}{2}$ $\quad S_2 = \sum_{i=1}^{i=p} i^2 = \dfrac{p(p+1)(2p+1)}{6}$ $\quad S_3 = \sum_{i=1}^{i=p} i^3 = \dfrac{p^2(p+1)^2}{4}$

## Problème 2

***Question 1***

a) La limite de $f_n$ en $+\infty$ est 0
b) La fonction dérivée $f_n^{'}(x)$ est $f_n^{'}(x) = \dfrac{(\ln x)^{n-1}}{n!x^3}(n - 2\ln x)$
c) $x = 1$ ou $x = e^{n/2}$
d) La fonction $f_n$ est positive
e) La fonction $f_n$ est maximale pour $x = e^{n/2}$. $y_n$ est égal à $\dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{n}{2e}\right)^n$

***Question 2***

a) On trouve $\dfrac{\ln x}{n+1}$
b) Evident en écrivant
c) Evident car $y_n$ est le maximum de $f_n$
d) Démonstration par récurrence
e) Comme $0 \le y_n \le \dfrac{1}{2^n e}$, la limite est nulle

***Question 3***

a) En utilisant le fait que $y_n$ est le maximum de $f_n$, on montre que : $0 \leq I_n(\beta) \leq (\beta - 1)y_n$

b) La limite de $I_n(x)$ quand $n$ tend vers $+ \infty$ est nulle

c) En intégrant $I_{n+1}(x)$ par parties (en posant u($t$)=ln$t$ et v'($t$)=$f_n(t)$), on démontre que $I_{n+1}(x) = I_n(x) - \dfrac{1}{(n+1)!}\dfrac{(\ln x)^{n+1}}{x}$

d) Démonstration par récurrence

e) $Z_n(x) = x - x\, I_n(x)$

f) La limite de $Z_n(\beta)$ quand $n$ tend vers $+ \infty$ est $\beta$

g) L = e

## Exercice 1

a) La probabilité est égale à 7 / 12, soit 58,3%

b) La probabilité est égale à (5/12) x (4/11) x (3/10) x (2/9) x (1/8), soit à 0,126%

c) $C_{12}^5 = 792$

## Exercice 2

a) E(X) = 2,7 jours

b) E(Y) = 5,4 jours. La loi de probabilité de Y est la suivante :
P(Y=2)=0,01 P(Y=3)=0,06 P(Y=4)=0,17 P(Y=5)=0,28
P(Y=6)=0,28 P(Y=7)=0,16 P(Y=8)=0,04

## Exercice 3

a) Soit $f$ appartient à $S_1 \cup S_2$, donc $f$ appartient à $S_1$ ou à $S_2$. Si $f$ appartient à $S_1$, alors $f$ est solution de (1), donc dérivable et $f'(x) - 2x = 0$, il est évident que $f$ est alors solution de $S_3$. Idem si $f$ appartient à $S_2$.

b) Soit la fonction $g(x) = 2|x|$. $g$ est continue et admet donc une primitive G sur R. G est dérivable et, pour tout $x$ réel, G'($x$)=$g(x)$. G est solution de (3) et appartient à $S_3$.
On a, par ailleurs, G'(-1) – 2(-1) différent de 0, donc G n'appartient pas à $S_1$ sur R
G'(1) + 2(1) différent de 0, donc G n'appartient pas à $S_2$ sur R

AVRIL 2007

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

**ITS Voie B Option Économie**

## CORRIGÉ DE L'ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

### Exercice n° 1

1) Pour l'année 2001, on a :

- TBM (Côte d'Ivoire) = 16,9‰
- TBM (Royaume-Uni) = 10,8‰ < TBM (Côte d'Ivoire)

Par tranche d'âge, tous les taux bruts de mortalité du Royaume-Uni sont inférieurs à ceux de la Côte d'Ivoire, souvent dans des rapports très importants (au moins 1 à 10 en dessous de 45 ans), alors que globalement le TBM du Royaume-Uni et le TBM de la Côte d'Ivoire sont dans un rapport de 1 à 2. Cela s'explique par la structure de la population, plus jeune en Côte d'Ivoire…

2) Le nombre de décès (arrondi à la centaine) qui seraient survenus dans chaque tranche d'âge en Côte d'Ivoire, dans l'hypothèse d'un taux de mortalité identique à celui du Royaume-Uni est donné ci-dessous :

| Age | Nb de décès |
|---|---|
| <1 | 3000 |
| 1-4 | 400 |
| 5-14 | 400 |
| 15-24 | 1800 |
| 25-34 | 1500 |
| 35-44 | 2000 |
| 45-54 | 3700 |
| 55-64 | 6300 |
| 65-74 | 9500 |
| 75-84 | 8100 |
| + de 85 | 2400 |
| Total | 39100 |

Soit un TBM (Côte d'Ivoire) de 2,4‰, plus faible que celui constaté (16,9‰) et bien sûr très inférieur à celui du Royaume-Uni en raison de la structure de la population de la Côte d'Ivoire.

## Exercice 2

1) P(D<40) = 0,35
P(D>70) = 0,33
P(30<D<60) = 0,32
P(D<30 ou D>60) = 0,68
P(D>60 sachant 20 ans) = 0,54
P(D<80 sachant 30 ans) = 0,76

2)

| I | Age (exprimé en années) $x_i$ | Nombre de survivants à cet âge $Sx_i$ | Nombre de décès entre deux âges $d(x_i,x_i+10)$ | $10qx_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1000 | 150 | 0,150 |
| 2 | 10 | 850 | 50 | 0,059 |
| 3 | 20 | 800 | 50 | 0,063 |
| 4 | 30 | 750 | 100 | 0,133 |
| 5 | 40 | 650 | 120 | 0,185 |
| 6 | 50 | 530 | 100 | 0,189 |
| 7 | 60 | 430 | 100 | 0,233 |
| 8 | 70 | 330 | 150 | 0,455 |
| 9 | 80 | 180 | 175 | 0,972 |
| 10 | 90 | 5 | 5 | 1,000 |
| 11 | 100 | 0 | | |

3) $e_0$ = 50,25 ans
$e_{70}$ = 10,61 ans
Une personne qui vient de naître a une espérance de vie de 50 ans. Une personne de 70 ans a encore près de 11 ans à vivre, en moyenne.

## Exercice 3

1) La première période correspond aux années 1985-1992 : décroissance forte du nombre d'entrées ;
   La seconde période correspond aux années 1992-1998 : stabilité du nombre d'entrées ;

   La troisième période correspond aux années 1998 et suivantes : de nouveau décroissance mais cette fois-ci décroissance moins forte.

   Graphiquement, le nombre d'entrées pour 2005 est proche de 110 millions d'entrées.

2)

| | E (nombre d'entrées en millions) | P (indice du prix relatif) |
|---|---|---|
| 1985 | 355 | 100 |
| 1989 | 276 | 120,3 |
| 1993 | 184 | 184,1 |
| 1997 | 175 | 247,6 |
| 2001 | 168 | 225,3 |
| 2004 | 121 | 215,3 |

3) Le prix du billet en 2005 est de 31,45 x 31,45/29,12, soit 33,97 euros. L'IGP en 2005 est de 695,7 x 1,031 soit 717,3. Donc P en 2005 vaut 225,5. Ce qui donne un nombre d'entrées de 157 millions.

   Cette méthode donne un résultat qui sera très vraisemblablement contredit dans les faits car elle ne distingue pas les trois périodes constatées dans l'évolution du nombre d'entrées. Il aurait fallu faire l'étude proposée dans les questions 2 et 3 uniquement sur la période 1998-2004. L'estimation pour 2005 serait alors meilleure, et proche du résultat obtenu graphiquement à la question 1.