Avril 2007

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

Corrigé de la 1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

$\mathbb{N}_n$ désigne $\{1, \cdots, n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie I

1. On a bien

$$\begin{aligned}\int_0^1 (x_0 + x_1 t + \cdots + x_n t^n)^2 dt &= \int_0^1 \sum_{0\leq i,j\leq n} x_i x_j t^{i+j} dt \\ &= \sum_{0\leq i,j\leq n} x_i x_j \frac{1}{i+j+1} = q_n(X)\cdot\end{aligned}$$

Il en résulte que q_n est définie positive.

2. a) Par linéarité, il suffit de vérifier l'égalité pour $P(t) = t^k$. Or

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 t^k dt &= \frac{1-(-1)^{k+1}}{k+1} \\ \text{et } \ i\int_0^\pi e^{i(k+1)\theta} d\theta &= \frac{1}{(k+1)}\left(e^{i(k+1)\pi} - 1\right) = \frac{1}{k+1}\left((-1)^{(k+1)} - 1\right)\cdot\end{aligned}$$

La somme de ces quantités vaut 0.

b) Si $X \neq 0$, le polynôme $P(t) = x_0 + \cdots + x_n t^n$ est non nul. Donc

$$\begin{aligned}q_n(X) &= \int_0^1 P(t)^2 dt < \int_{-1}^1 P(t)^2 dt \\ &= |\int_{-1}^1 P(t)^2 dt| = |i\int_0^\pi P(e^{i\theta})^2 e^{i\theta} d\theta|,\end{aligned}$$

On en déduit que $q_n(X) < \displaystyle\int_0^\pi |P(e^{i\theta})|^2 d\theta\cdot$

c) On a

$$\int_0^\pi |P(e^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{0\leq j,k\leq n} x_k x_j \int_0^\pi e^{i(j-k)\theta} d\theta,$$

puisque les x_j sont réels. Donc

$$\int_0^\pi |P(e^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{0\leq j\neq k\leq n} x_k x_j \frac{(-1)^{(j-k)} - 1}{j-k} + \pi \sum_0^n x_j^2 = \pi||X||_2^2\cdot$$

Ainsi $q_n(X) < \pi||X||_2$.

3. A étant symétrique, il existe alors une matrice orthogonale O telle que

$$A = {}^tO\Lambda O$$

avec $\Lambda_{i,j} = 0$ si $i \neq j$ et $\Lambda_{i,i} = \lambda_i$, les λ_i étant les valeurs propres de A. Il résulte que si on pose $Y = OX$, on aurrait

$${}^tXAX = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2.$$

Ainsi, si les λ_i étaient strictement positifs on aurait ${}^tXAX \geq 0$ et inversement en prenant le vecteur X_i tel que $OX_i = (\delta_{ij})_{1\leq j\leq n}$, avec $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$ et $\delta_{ii} = 1$, on obtient ${}^tXAX = \lambda_i > 0$.

4. Puisque H_n est définie positive il résulte des questions 3. et 2. c) que $Sp(H_n) \subset]0, \pi[$.

5. a) Les valeurs propres de $H_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ sont les racines de $\lambda^2 - \dfrac{4}{3}\lambda + \dfrac{1}{12}$,
soit

$$\lambda_1 = \frac{4+\sqrt{13}}{6}, \lambda_2 = \frac{4-\sqrt{13}}{6}$$

.
b) $q_1(X)$ s'écrit dans une base de vecteurs propres

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2.$$

c) Il résulte que l'équation de Γ s'écrit

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1.$$

où $a_i^2 = \dfrac{1}{\lambda_i}$.
d) Le tracé en découle, il s'agit d'une ellipse.

6. Puisque H_1 est définie positive, N est une norme dont Γ est la sphère unité.

Partie II

1. Soit ${}^tX = ({}^tY, y_n) \in \mathcal{M}_{1,n+1}(\mathbb{R})$. On a

$${}^tXBX = {}^tYAY + 2y_n{}^tCY + y_n^2 a. \tag{1}$$

Clairement A est symétrique et si $Y = 0$ et $y_n = 1$ on obtient que $a > 0$ car ${}^tXBX > 0$. De même, si $y_n = 0$ et Y est non nul on obtient ${}^tYBY > 0$ car ${}^tXBX > 0$.

2. Comme dans la question I.3., on choisit une base telle que $q_B(X) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$. Il résulte que si $||X||_2 = 1$ alors $q_B(X) \geq \alpha_1$, avec égalité pour le vecteur dont les coordonnées sont toutes nulles sauf celles d'indice i qui vaut α_1. D'où $\min\limits_{||X||_2=1}(q_A(X)) = \alpha_1$, de même pour $\beta_1 = \max\limits_{||X||_2=1}(q_A(X))$.

3. En prenant dans (1), $y_n = 0$, il résulte que $q_B(X) = q_A(Y)$ par suite $q_A(Y) \geq \alpha_2$ et ainsi $\alpha_1 \geq \alpha_2$. De même pour $\beta_2 \geq \beta_1$.

4. a) Appliquer (1) avec $y_n = u$ et $Y = X$.

b) En calculant le second membre et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient :

$$|{}^t XC| \leq ||X||_2 ||C||_2$$

et par suite l'inégalité recherchée.

5. Prenons un vecteur propre de norme 1 associé à la valeur propre β_2. Il vient

$$q_B(X) = \beta_2 \leq \max_{u^2+v^2=1} \left\{ \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} D \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\}.$$

Où $D = \begin{pmatrix} \beta_2 & ||C||_2 \\ ||C||_2 & a \end{pmatrix}$. Donc $\beta_2 \leq \max_{\lambda \in Sp(D)} \lambda = \dfrac{1}{2} \left\{ \beta_1 + a + \sqrt{4||C||_2^2 + (\beta_1 - a)^2} \right\}$.

5. Clairement par ce qui précède (II.3) (α_n) est une suite décroissante et (β_n) est croissante. L'inégalité découle du la question II.4 .c) qui permet d'obtenir

$$\beta_{n+1} \leq \frac{1}{2} \left\{ \beta_n + \frac{1}{2n+3} + \sqrt{\left(\beta_n - \frac{1}{2n+3}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+3)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n+2)^2}\right)} \right\}$$

Or pour tout $a, b \geq 0$, on a

$$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

Il résulte que

$$\beta_{n+1} \leq \frac{1}{2} \left\{ \beta_n + \frac{1}{2n+3} + \left| \beta_n - \frac{1}{2n+3} \right| + 2\sqrt{\left(\frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+3)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n+2)^2}\right)} \right\}$$

Mais $\beta_n \geq \beta_0 = 1$. Donc $\beta_n \geq \dfrac{1}{2n+3}$ et

$$\beta_n + \frac{1}{2n+3} + \left| \beta_n - \frac{1}{2n+3} \right| = 2\beta_n.$$

D'autre part

$$\frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+3)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n+2)^2} \leq \int_{n+1}^{2n+1} \frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{n+2}.$$

D'où l'inégalité recherchée.

Partie III

1. Facile à voir.

2. Il suffit de voir que $\delta_n = \inf_{P \in \mathbb{R}_{n-1}[t]} \left\{ ||e_n - P||^2 \right\}$, avec $e_n(t) = t^n$ et la norme $||\ ||$ étant associée au produit scalaire définie dans III 1. Il vient qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[t]$ tel que $||e_n - P||^2 = \delta_n$ et pour tout $i \in [0, n-1]$,

$$< e_n - P, e_i >= 0.$$

3. a) Constatons que pour tout $k \in [0, n-1]$ on a

$$F(k) = \int_0^1 (a_0 + a_1 t + \cdots + a_{n-1} t^{n-1} + t^n) t^k dt = 0.$$

b) On peut écrire

$$F(X) = \frac{A(X)}{(X+1)\cdots(X+n+1)}$$

avec $deg(A) \leq n$ et de a) on déduit que $A(0) = \cdots = A(n-1) = 0$, ainsi

$$A(X) = \lambda X(X-1)\cdots(X-n+1)\cdot$$

Donc

$$F(X) = \lambda \frac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{(X+1)\cdots(X+n+1)}\cdot$$

Or par la définition de F, on a $F(X)(X+n+1)$ pris en $X = -n-1$ a pour valeur 1. Il résulte que $\lambda = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ et par suite

$$F(X) = \frac{(2n)!}{(n!)^2}\frac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{(X+1)\cdots(X+n+1)}\cdot$$

c) $\delta_n = F(n) = \frac{(n!)^4}{(2n!)(2n+1)!}$ $\cdot$

4. Prendre $X = (a_0, \cdots, a_{n-1}, 1)$, il résulte que $\delta_n = q_n(X)$ et par suite

$$\alpha_n \leq \frac{\delta_n}{||X||_2^2} \leq \frac{(n!)^4}{(2n!)(2n+1)!} = u_n\cdot$$

Il est facile de voir que $u_n \leq \frac{1}{12.15^n}\cdot$ D'où le résultat.

Partie IV

1. On a $AX = B$ et $\Delta X = A^{-1}\Delta B$, car $A\Delta X = \Delta B$ donc $||B||_2 \leq ||A||\ ||X||_2$ et $||\Delta X||_2 \leq ||A^{-1}||\ ||\Delta B||\cdot$ D'où

$$\frac{||\Delta X||_2}{||X||_2} \leq C(A)\frac{||\Delta B||_2}{||B||_2}$$

2. La matrice ${}^tAA$ est symétrique, on peut alors choisir une base orthonormale de vecteurs propres, ainsi, on obtient que $||A||^2 = \max(Sp({}^tAA))$. Par ailleurs ${}^tAA = {}^tA(A^tA){}^tA^{-1}$. Donc $Sp({}^tAA) = Sp(A^tA)$ et donc

$$||A^{-1}||^2 = \max(Sp(({}^tAA)^{-1})) = \frac{1}{\min(Sp({}^tAA))}\cdot$$

D'où le résultat.

3. Si A est symétrique définie positive alors ${}^tA = A$, il vient que

$$C(A) = \frac{\max(Sp(A))}{\min(Sp(A))}$$

4. Si $C(A) = 1$ alors $\max(Sp(({}^tAA)^{-1})) = \min(Sp({}^tAA))$. Donc la valeur propre $\min(Sp({}^tAA))$ est de multiplicité n. Il résulte que ${}^tAA = \min(Sp({}^tAA))Id$ et donc $\frac{A}{\sqrt{\min(Sp({}^tAA))}}$ est orthogonale.

5. On a ${}^tQAQA = {}^tAA$ Donc $C(A) = C(QA)$.
6. On a
$$C(H_n) = \frac{\beta_n}{\alpha_n} \geq \frac{\beta_1}{\alpha_n} \geq \frac{4+\sqrt{13}}{6} \times 12 \times 15^{n-1}.$$

AVRIL 2007

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice n° 1

Soit l'équation $(E_n) : x^n + x - 1 = 0$

1. Posons $f_n(x) = x^n + x - 1$, alors $f_n^{'}(x) = nx^{n-1} + 1$.

   f_n est continue, strictement croissante et réalise une bijection de R^+ sur $[-1, +\infty[$, $f_n(0) = -1$, il existe donc une unique solution x_n ; de plus $f_n(1) = 1$, donc $x_n \in]0,1[$.

   Si $x_{n+1} < x_n$, alors $x_{n+1}^{n+1} < x_{n+1}^n < x_n^n$ et $x_{n+1}^{n+1} + x_{n+1} - 1 < x_n^n + x_n - 1$, ce qui est absurde. La suite (x_n) est donc croissante et majorée, elle converge vers une limite l. Si $l < 1$, alors par passage à la limite dans l'équation, $l - 1 = 0$, ce qui est absurde, donc $l = 1$.

2. f_n est strictement décroissante sur $]0,1[$, $f_n(u_n) = 0$, $f_n(\frac{Lnn}{2n}) \approx \frac{Lnn}{2} > 0$ et $f_n(2\frac{Lnn}{n}) \approx -Lnn < 0$, donc à partir d'un certain rang $\frac{Lnn}{2n} \leq u_n \leq 2\frac{Lnn}{n}$

3. $Ln(\frac{Lnn}{2n}) \leq Ln(u_n) \leq Ln(2\frac{Lnn}{n})$ implique $Ln(u_n) \approx -Lnn$, puis $nLn(1 - u_n) = -Lnu_n$ implique $-nu_n \approx -Lnn$, d'où $u_n \approx \frac{-Lnn}{n}$ et enfin $x_n = 1 - \frac{Lnn}{n} + o\left(\frac{Lnn}{n}\right)$

Exercice n° 2

1. Soit $I=\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx$, on effectue le changement de variable $x=e^t$, d'où $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+e^{2t}}{1+e^{4t}}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{ch(t)}{ch(2t)}dt$, avec $ch(t)=\frac{e^t+e^{-t}}{2}$ et $sh(t)=\frac{e^t-e^{-t}}{2}$. On a : $ch2t=1+2sh^2t$. En posant $u=sht$, on obtient : $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+2u^2}du$, puis en posant $t=\sqrt{2}u$, $I=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}dt=\frac{1}{\sqrt{2}}[Arctg(t)]_{-\infty}^{+\infty}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

2. A l'aide du changement de variable $x=1/t$, on a : $J=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^4}dx=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx$

donc $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^4}dx=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

Exercice n° 3

On cherche à déterminer toutes les fonctions numériques continues sur R f qui vérifient : $f(x)=-1-\int_0^x(x-t)f(t)dt$

Supposons que f soit une solution de cette équation, alors

$f(x)=-1-x\int_0^x f(t)dt+\int_0^x tf(t)dt$ et en particulier $f(0)=-1$.

Le terme de droite de l'équation précédente étant dérivable, f est dérivable.

Et $f'(x)=-\int_0^x f(t)dt-xf(x)+xf(x)$, soit $f'(x)+\int_0^x f(t)dt=0$.

Posons $y(x)=\int_0^x f(t)dt$, on obtient l'équation différentielle : $y''(x)+y(x)=0$.

La solution générale est $y(x)=A\cos x+B\sin x$, et avec les conditions $y(0)=0$ et $y'(0)=-1$, $y(x)=-\sin x$ et $f(x)=-\cos x$

On vérifie aisément que $f(x)=-\cos x$ est solution de l'équation proposée.

Exercice n° 4

Soit $f_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{x^2}{2n^2}\right)^{2n^4}$

1. $\underset{n\to+\infty}{Lim} f_n(x) = \underset{n\to+\infty}{Lim} \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{2n^4 Ln(1-\frac{x^2}{2n^2})} = \underset{n\to+\infty}{Lim} \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2n^2} = 0$

2. L'intégrale $\int_R g(x) f_n(x)\,dx = \int_a^b g(x) f_n(x)\,dx$ est bien définie. En posant $x = t/n$, on obtient $\int_R g(x) f_n(x)\,dx = \int_{na}^{nb} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{t^2}{2n^4}\right)^{2n^4} g(t/n)\,dt = \int_R h_n(t)\,dt$ avec
$h_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{t^2}{2n^2}\right)^{2n^4} g(t/n) I_{[na,nb]}(t)$

Pour n assez grand tel que $a/n, b/n \le 1$ on ait pour tout
$t \in [na, nb]$, $\left|t^2/2n^4\right| \le 1/2 < 1$,
$\left|h_n(t)\right| = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{2n^4 Ln(1-t^2/2n^4)} \le \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} = \varphi(t)$. Cette inégalité reste encore valable pour
$t \notin [na, nb]$.

La fonction φ étant continue par morceaux et intégrable sur R, on peut alors appliquer le théorème de converge dominée et conclure $\underset{n\to+\infty}{Lim} \int_R g(x) f_n(x)\,dx = g(0)$, sachant que $\int_R e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$

Exercice n° 5

On note $I_n = \int_0^{\pi/4} tg^n x\,dx$,

1. $I_n + I_{n+2} = \int_0^{\pi/4} (1 + tg^2 x) tg^n x\,dx = \frac{1}{n+1}$

2. La suite I_n est décroissante et minorée par zéro donc elle converge.

3. On a $I_n + I_{n+2} \le 2I_n \le I_{n-2} + I_n$, d'où $I_n \approx \frac{1}{2n}$.

Exercice n° 6

1. On suppose que $l \leq a$.

   a. La représentation géométrique montre qu'il y a chevauchement si $\frac{l}{2}\cos\theta \geq d$.

   b. On note ω un lancer de l'aiguille. Les applications $\omega \to d$ et $\omega \to \theta$ sont considérés comme des variables aléatoires uniformes. Elles sont susceptibles de prendre n'importe quelles valeurs dans les intervalles respectifs $[0, a/2]$ et $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

   Soit G le graphe de la fonction $\theta \to \frac{l}{2}\cos\theta$ à l'intérieur du pavé $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{a}{2}\right]$. A un lancer de l'aiguille correspond point de coordonnées (θ, l) dans ce pavé. Il y aura chevauchement si et seulement si ce point est en dessous du graphe G. La probabilité de chevauchement est égale à l'aire sous la courbe (cas favorables) divisée par l'aire du pavé (cas possibles) :

$$p = \frac{\frac{l}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta \, d\theta}{\pi \times \frac{a}{2}} = \frac{2l}{\pi a}$$

2. On suppose maintenant $l > a$.

Le raisonnement précédent est encore valable, mais cette fois le graphe G sort du pavé. Pour calculer l'aire incluse dans le pavé il faut évaluer les abscisses $-\alpha$ et α des points d'intersection entre G et le segment supérieur du pavé. On obtient $\alpha = Arc\cos(\frac{a}{l})$.

$$p = \frac{\frac{l}{2}\int_{-\pi/2}^{-\alpha}\cos\theta \, d\theta + 2\alpha\frac{a}{2} + \frac{l}{2}\int_{\alpha}^{\pi/2}\cos\theta \, d\theta}{\pi \times \frac{a}{2}} = \frac{2l(1-\sin\alpha) + 2a\alpha}{\pi a}$$

Exercice n° 7

Pour $\alpha \in]-1,1[$, on donne l'équation fonctionnelle (E) suivante :

$$\forall x \in R, \quad f(x) = (1-x) f(\alpha x) \text{ où } f \text{ est une fonction continue sur } R.$$

1. Si f est solution de (E) alors $f(x) = \prod_{k=0}^{n} (1-\alpha^k x) f(\alpha^{n+1} x)$. Quand n tend vers plus l'infini, $f(\alpha^{n+1} x) \to f(0)$ tandis que la suite de terme général $\prod_{k=0}^{n}(1-\alpha^k x)$ converge. En effet, pour N assez grand, $\forall n \geq N, \ \prod_{k=N}^{n}(1-\alpha^k x) > 0$ et $Ln(\prod_{k=N}^{n}(1-\alpha^k x)) = \sum_{k=N}^{n} Ln(1-\alpha^k x)$ et $Ln(1-\alpha^k x)$ est le terme général d'une série absolument convergente. Ainsi, $\forall x \in R, \quad f(x) = f(0)\prod_{k=0}^{\infty}(1-\alpha^k x)$. La fonction g a une expression de la même forme, d'où l'égalité de f et g lorsque $f(0) = g(0)$.

2. Par calculs, on obtient que pour $a_0 \in R$ et pour tout n, $a_{n+1} = \dfrac{\alpha^n}{(1-\alpha^{n+1})} a_n$, la série entière $\sum a_n x^n$ converge pour tout $x \in R$ et sa fonction somme $\sum_0^{\infty} a_n x^n$ est solution de l'équation prenant la valeur a_0 en 0.

   Ainsi toutes les fonctions f solutions de (E) sont développables en série entière sur R et on vérifie $f(x) = f(0)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\prod_{k=0}^{n-1}\dfrac{\alpha^k}{1-\alpha^{k+1}}\right)x^n$.

AVRIL 2007

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CORRIGE DE l'EPREUVE DE CALCUL NUMÉRIQUE

Exercice 1.

1. Soit le rationnel 1. On a pour tout rationnel $x = \frac{p}{q}$, $x+1$ qui est un rationnel puisque $\frac{p}{q} + 1 = \frac{p+1}{q}$ qui est également un rationnel. Ainsi $f(x) = f(x+1) = 1$. Maintenant, soit x irrationnel, $x+1$ est alors un irrationnel, et $f(x+1) = g(x) = 0$. Ainsi 1 est une période non nulle de f, et f est périodique.

2. Soit a une période de f. On a pour tout x réel $f(x+a) = f(x)$. En particulier, si $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ avec p et $q \neq 0$ deux entiers relatifs, $f(x) = 1$ donc $f(x+a) = 1$. Ce qui implique que $x+a$ est rationnel. Ainsi il existe p' et $q' \neq 0$ tels que $x + a = \frac{p'}{q'}$ où encore $a = \frac{p'q - pq'}{qq'}$. Ainsi a est rationnel.

3. Soient a un rationnel quelconque et x un réel. On a alors soit x et $x+a$ rationnels soit x et $x+a$ irrationnels.

4. Ainsi tout rationnel est une période de f or le groupe des rationnels n'admet pas de plus petit élément.

Exercice 2.

1. On a $|f_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ qui tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. La suite de terme général f_n converge donc uniformément vers la fonction identiquement nulle.

2. Pour tout n entier non nul, f_n est dérivable sur tout $\mathbb{R}$, de dérivée $f_n'(x) = \sqrt{n}\cos(nx)$. Enfin, la fonction identiquement nulle est également dérivable, de dérivée nulle.

3. Soit $x = \pi$, $f_n'(\pi) = (-1)^n\sqrt{n}$ est une série alternée divergente. Ainsi, bien que la suite (f_n) soit uniformément convergente, que f_n soit dérivable en tout point et que la limite de (f_n) soit dérivable, la suite des dérivées (f_n') n'est pas convergente.

Problème

- **Préliminaires.**

  1.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx &= \int_{x\geq t} x^2 f(x)dx + \int_{x<t} x^2 f(x)dx \\
&\geq \int_{x^2\geq t^2} x^2 f(x)dx \quad \text{car le second terme est toujours positif} \\
&\geq t^2 \int_{x\geq t} f(x)dx \quad \text{car le second terme est toujours positif.}
\end{aligned}$$

Ou encore

$$\forall t > 0, \quad 1 - F_Y(t) \leq \frac{\mathbb{E}(Y^2)}{t^2} \tag{1}$$

2. Comme f est une densité strictement positive on a $F'_Y(x) = f(x) > 0$. On a F_Y est strictement croissante.
3. $P(Y - \mu > t) = 1 - P(Y \leq t + \mu) = 1 - F_Y(t + \mu)$.
4.

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= P(Y \leq t) \\ &= P(\sigma Z + \mu \leq t) \\ &= P(Z \leq \frac{t-\mu}{\sigma}) \end{aligned}$$

5. $\mathbb{E}[(t - \mathbf{Y})^2] = t^2 - 2t\mu + \sigma^2 + \mu^2$. Pour $t = \mu$, $\mathbb{E}[(\mathbf{Y} - \mu)^2] = \sigma^2$.
6. On considère ici $\mu = 0$. Montrer que, pour tout réel $t > 0$:

$$\begin{aligned} t &= \mathbb{E}(t - Y) \\ &= \mathbb{E}((t - Y)(\mathbb{1}_{Y<t} + \mathbb{1}_{Y\geq t})) \\ &\leq \mathbb{E}((t - Y)(\mathbb{1}_{Y<t})) \quad \text{car } \mathbb{E}((t - Y)\mathbb{1}_{Y\geq t}) \text{ est négatif} \\ &\leq \sqrt{\mathbb{E}((t - Y)^2)\mathbb{E}(\mathbb{1}^2_{Y<t})} \quad \text{par l'inégalité de Cauchy Schwarz.} \end{aligned}$$

- **Question 1.**

1. Soit t tel que $F_Y(t) = p$. Par 1, on a, en remplaçant $F_Y(t)$ par p, et pour t et p tels que $1 - p \neq 0$,

$$1 - p \leq \frac{\sigma^2}{t^2}.$$

On conclut en appliquant une racine carrée.

2. Comme $F_Y(\tilde{t}) = \tilde{p} = F_Z(\tilde{t} - \mu)$, et que Z à une espérance nulle, on applique le résultat de la question précédente avec $t = \tilde{t}\mu$ et $p = \tilde{p}$.
3. On cherche un majorant de t tel que $F_Y(t) = 90\% = p$. On utilise la question précédente pour conclure.

- **Question 2.**

1. On utilise le préliminaire 5 et on obtient $\mathbb{E}((t - Y)^2) = t^2 + 1$. Puis en injectant ce résultat dans (1) on a $t \leq \sqrt{(t^2 + 1)\mathbb{P}(Y < t)}$ ce qui permet de conclure.
2. Comme $F_Y(t) = p$, avec la question précédente on conclut.
3. On pose $Z = \frac{Y-\mu}{\sigma}$ avec $\mathbb{E}(Z) = 0$ et $var(Z) = 1$. En remarquant que $F_Y(t) = p \iff F_Z(\frac{t-\mu}{\sigma}) = p$ et en posant $\tilde{t} = \frac{t-\mu}{\sigma}$ et $\tilde{p} = p$, avec le résultat de la question précédente on conclut.
4. On remplace par $p = 90\%$.

- **Question 3.**

1. Il permet de donner très rapidement un majorant de tout décile qui n'est pas trop grossier.

2. Ce résultat est généralisable à toute variable aléatoire admettant une variance. Le problème qui peut se poser est au niveau de l'inverse de la fonction de répartition. En effet dans le cas de variable dont la densité s'annule, ou de variable discrète par exemple, la fonction de répartition n'est pas toujours strictement croissante. Il suffit alors de considérer l'inverse comme étant le sup de l'ensemble des réels t pour lesquels $F_Y(t) = p$. Tous les résultats énoncés s'appliquent alors en raison du sens des inégalités montrées.