

AVRIL 2003

ITS

VOIE A

CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Exercice n° 1

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$, car $\left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq \frac{1}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln x}{x}} = 0$

3. $x^2 + 2x + 2 = 0$ implique $x = -1 \pm i$

4. La dérivée de $\frac{\ln x}{1+x^2}$ est égale à $\frac{1}{x(1+x^2)} - \frac{2x \ln x}{(1+x^2)^2}$

5. La dérivée de $x \cos x$ est égale à $\cos x - x \sin x$

6. $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k = 0$

7. $\int_0^1 x e^x dx = [x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = 1$

8. $\int_0^1 \frac{x-2}{x+1} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{3}{x+1}\right) dx = 1 - 3 \ln 2$

9. $\lim_n \left(1 + \frac{2}{3^n}\right) = 1$, car $\lim_n \frac{2}{3^n} = 0$

10. On obtient les valeurs $-\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$

Exercice n° 2

$$\textcircled{1} \text{ Aire} = \int_0^1 f(x) dx - a = \left[\frac{(x-1)^3}{3} + ax \right]_0^1 - a = \frac{1}{3}$$

$\textcircled{2}$ On pose $y = (x-1)^2 + a - \ln x$. La dérivée est du signe de $2x^2 - 2x - 1$. La fonction admet un minimum pour $x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$. Elle est décroissante avant cette valeur, puis croissante.

Si $f\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) > 0$, l'équation n'admet pas de solution.

Si $f\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) = 0$ (c'est-à-dire $a = \ln\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{4-2\sqrt{3}}{4}\right)$), l'équation admet une seule solution.

Si $f\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) < 0$, l'équation admet deux solutions.

$\textcircled{3}$ Le graphe de f et le graphe de la fonction logarithme népérien ont deux points d'intersection d'abscisse 1 et a (que l'on ne cherchera pas à calculer). L'aire est égale à :

$$\int_1^a (\ln x - (x-1)^2) dx = \left[x \ln x - x - \frac{(x-1)^3}{3} \right]_1^a = a \ln a - a - \frac{(a-1)^3}{3} + 1$$

Exercice n° 3

① La fonction f est strictement croissante sur R .

$$f'(x) = a + be^{bx} > 0$$

② Comme f est continue et strictement croissante de R dans R , d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation admet une unique solution que l'on notera a .

Par ailleurs $f(-n) = -na + e^{-n}$.

Si $a > \frac{1}{e}$, alors $a \in]-1, 0[$. Et si $\frac{1}{(n-1)e^{n-1}} > a > \frac{1}{ne^n}$, alors $a \in]-n+1, -n[$ ($n > 0$)

$$\textcircled{3} \int_0^1 f(x) dx = \left[a \frac{x^2}{2} + \frac{1}{b} e^{bx} \right]_0^1 = \frac{a}{2} + \frac{e^b - 1}{b}$$

④ On suppose dans cette question que $a < 0$.

- $f'(x) = a + be^{bx}$. Cette fonction s'annule pour une certaine valeur $d = \frac{1}{b} \ln\left(\frac{-a}{b}\right)$. La fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty, d[$ et strictement croissante sur $]d, +\infty[$

- Le minimum de f est atteint pour $x = \frac{1}{b} \ln\left(\frac{-a}{b}\right)$ et la valeur du minimum est égale à : $\frac{a}{b} \ln\left(\frac{-a}{b}\right) - \frac{a}{b}$

- Il faut $\frac{a}{b} \ln\left(\frac{-a}{b}\right) - \frac{a}{b} < 0$, d'où $a < -be$

Exercice n° 4

① Exprimer $Max(u, v) = (u - v)_+ + v$

② $\frac{u(t)}{v(t)} = t^2 + 1$, donc $F(t) = Max\{2, t^2 + 1\}$

F est dérivable sur $R - \{\pm 1\}$. En effet $f'_d(1) = 2 \neq f'_g(1) = 0$

③ Si $I = 0$, $G(t) = Max\{2, 1\} = 2$ et G est dérivable.

Si $I \neq 0$, $e^{It} = 2$ implique $t = \frac{\ln 2}{I}$. G est dérivable sur $R - \left\{ \frac{\ln 2}{I} \right\}$

PROBLEME

Soit la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels par :

$$f(x) = x^2 \ln(1 + x^2)$$

① f est une fonction paire, il suffit donc de faire l'étude sur l'ensemble des nombres réels positifs. Son graphe est alors symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. La dérivée de f est $f'(x) = 2x \ln(1 + x^2) + \frac{2x^3}{1 + x^2}$, expression qui est

toujours positive. f est donc strictement croissante sur R^+ . Le graphe de f a la forme de celui de la parabole d'équation $y = x^2$, mais avec des branches paraboliques plus verticales.

② $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 (\ln(1 + x^2) - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \sqrt{e - 1}$. Il y a donc deux points d'intersection entre les graphes de f et g .

③ Le calcul de l'intégrale se fait dans un premier temps par parties.

On pose $u' = x^2$ et $v = \ln(1+x^2)$. On obtient :

$$I = \left[\frac{x^3}{3} \ln(1+x^2) \right]_0^1 - \frac{2}{3} \int_0^1 \frac{x^4}{1+x^2} dx = \frac{\ln 2}{3} - \frac{2}{3} J, \text{ où } J = \int_0^1 \frac{x^4}{1+x^2} dx.$$

$$\text{Par ailleurs, } J = \int_0^1 \frac{x^4}{1+x^2} dx = \int_0^1 \left(x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - x + \text{Arctg} x \right]_0^1 = -\frac{2}{3} + \frac{p}{4}$$

$$\text{Par conséquent } I = \frac{\ln 2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{p}{6}$$

L'aire comprise entre le graphe de f , le graphe de g et les droites verticales

d'équation $x=0$ et $x=1$ est égale à $\int_0^1 (g(x) - f(x)) dx = \frac{\ln 2}{3} + \frac{1}{9} - \frac{p}{6}$

$$\textcircled{4} \text{ On a } \int_0^t (f(x) - g(x)) dx \geq t^2 \int_0^t (\ln(1+x^2) - 1) dx \text{ et } \lim_{t \rightarrow +\infty} j(t) = +\infty.$$

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE A
AVRIL 2003

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Corrigé

Exercice 1

1) $|\cos x| \leq 1$, donc $-1 \leq a_2 \leq 1$. Par conséquent $0 < a_3 < 1$ d'où $0 < a_n < 1$ pour $n \geq 3$.

2) Comme la fonction $\cos x$ est strictement décroissante sur l'intervalle $[0, 1]$, si $a_n < a_{n+1}$ alors $a_{n+2} < a_{n+1}$. La dérivée de $\cos x$ est supérieure à -1 sur l'intervalle $[0, 1]$, donc si $a_n < a_{n+1}$ alors on a $\cos a_n - \cos a_{n+1} < a_{n+1} - a_n$. Ceci montre que $a_n < a_{n+2} < a_{n+1}$. De la même façon, on montre que si $a_n > a_{n+1}$, alors $a_n > a_{n+2} > a_{n+1}$.

3) On en déduit que, soit la suite (a_{2n}) est croissante et majorée et la suite (a_{2n+1}) est décroissante et minorée, soit vice versa. Donc les deux suites (a_{2n}) et (a_{2n+1}) sont convergentes.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires $|a_{n+1} - a_{n+2}| = |\cos a_n - \cos a_{n+1}| = \sin k |a_n - a_{n+1}|$ pour un certain k dans $(0, 1)$. Mais $\sin k < \sin 1 < 0.9$. Donc les suites (a_{2n}) et (a_{2n+1}) convergent vers la même limite.

4) Notons h cette limite. Alors $h = \cos h$. Mais comme $\cos x$ est strictement décroissante sur l'intervalle $[0, 1]$, et comme la fonction identité $x \mapsto x$ est strictement croissante sur le même intervalle $[0, 1]$, les deux fonctions ont un seul point d'intersection sur cet intervalle. Donc la limite h est l'unique point de $(0, 1)$ qui vérifie $h = \cos h$.

Exercice 2

1°) Module et argument de z

On peut écrire

$$\begin{aligned} z &= [2\sin(\varphi/2)\cos\frac{j}{2} + i(1-1+2\sin^2\frac{j}{2})]/2 \\ &= \sin\frac{j}{2} [\cos\frac{j}{2} + i\sin\frac{j}{2}] \end{aligned}$$

Discutons suivant les valeurs de φ , le signe de $\sin\frac{j}{2}$

* si $\varphi=0$ alors $z=0$.

* si $\varphi \in]0, \pi[$ alors z a pour module $\sin \frac{j}{2}$ et argument $\frac{j}{2}$

* si $\varphi \in]-\pi, 0[$ alors z a pour module $-\sin \frac{j}{2}$ et argument $\frac{j}{2} + \pi$

2°) Module et argument de $(z-i)$

On vérifie de la même manière que:

$$z-i = \cos \frac{j}{2} \left[\cos \left(\frac{j}{2} - \frac{p}{2} \right) + i \sin \left(\frac{j}{2} - \frac{p}{2} \right) \right]$$

Comme $\cos \frac{j}{2} > 0$ pour tout $\varphi \in]0, \pi[$, $z-i$ a pour module $\cos \frac{j}{2}$ et argument $\frac{j}{2} - \frac{p}{2}$

De même on vérifie que: $\frac{z}{z-i} = i \operatorname{tg} \frac{j}{2}$ qui a pour module $\operatorname{tg} \frac{j}{2}$ et argument $\frac{p}{2}$ car $\operatorname{tg} \frac{j}{2} > 0$ pour tout $\varphi \in]0, \pi[$.

3°) Ensemble de points M lorsque φ décrit $\in]0, \pi[$.

Soit $M(z)$ un point de l'ensemble.

Comme on a : $z-i = \frac{1}{2} [\sin j - i(1 + \cos j)]$ les coordonnées (x, y) de $M(z)$ vérifient :

$$x = \frac{1}{2} \sin j \quad \text{et} \quad y = -\frac{1}{2} (1 + \cos j)$$

Donc $x^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ et par suite M appartient au cercle (C) de centre $I(0, -\frac{1}{2})$ et de rayon $\frac{1}{2}$

Comme $0 \leq \sin j \leq 1$ et $-1 < \cos \varphi < 1$, on en déduit que M décrit le demi-cercle de (C) privé des points $O(0, 0)$ et $A(-1, 0)$.

*** L'ensemble de points N**

Les coordonnées x et y de N vérifient $x=0$ et $y = \operatorname{tg} \frac{j}{2}$ avec $\varphi \in]0, \pi[$.

On en déduit que N décrit la demi-droite définie par $x=0$ et $y>0$ c'est-à-dire le demi-axe des y positifs sans l'origine.

Problème

Partie A

1. $g'(x) = 1 - e^x < 0$ pour tout $x \in [0, +\infty[$, donc g est décroissante sur $[0, +\infty[$. De plus, en utilisant la factorisation pour $x \neq 0$

$$g(x) = x \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{e^x}{x} \right)$$

on trouve que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

2.a) La fonction g est dérivable sur $[0, +\infty[$, strictement décroissante. Elle définit donc une bijection de $[0, +\infty[$ sur $]-\infty, 1]$ qui contient 0, donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution et une seule \mathbf{a} dans $[0, +\infty[$.

b) Comme $g(1,14) \cong 0,0132 > 0$ et $g(1,15) \cong -0,0082 < 0$, on a $1,14 < \mathbf{a} < 1,15$

D'après le tableau de variations de g , $g(x) > 0$ pour $x \in [0, \mathbf{a}[$ et $g(x) < 0$ pour $x \in]\mathbf{a}, +\infty[$.

Partie B

1.a) Pour tout x appartenant à $[0, +\infty[$,

$$f'(x) = e^x \frac{x+2-e^x}{(xe^x+1)^2} = \frac{e^x g(x)}{(xe^x+1)^2}$$

b) Comme $e^x > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$. Donc f est croissante sur $[0, \mathbf{a}[$ et décroissante sur $]\mathbf{a}, +\infty[$.

2.a) Pour tout réel positif x ,

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1} = \frac{e^x(1 - e^{-x})}{e^x(x + e^{-x})} = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$$

b) Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ on a donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

La courbe représentative de f admet donc une asymptote d'équation $y = 0$.

3.a) On a : $g(\mathbf{a}) = 0 \Leftrightarrow e^{\mathbf{a}} = \mathbf{a} + 2$. En remplaçant $e^{\mathbf{a}}$ par $\mathbf{a} + 2$ dans l'expression de $f(\mathbf{a})$, on obtient la relation demandée.

b) On en déduit :

$$1,14 < \mathbf{a} < 1,15 \Rightarrow \frac{1}{1,15+1} < \frac{1}{\mathbf{a}+1} < \frac{1}{1,14+1}$$

ce qui fournit un encadrement de $f(\mathbf{a})$ d'amplitude 10^{-2} : $0,46 < f(\mathbf{a}) < 0,47$

4. Une équation de la droite tangente à l'origine est $y = x$.

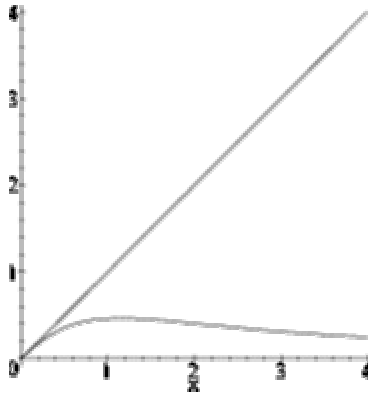
5. a) Pour tout x appartenant à l'intervalle $[0, +\infty[$

$$f(x) - x = \frac{e^x - 1 - x^2 e^x - x}{xe^x + 1} = \frac{(1+x)(-xe^x + e^x - 1)}{xe^x + 1}$$

b) $u'(x) = -xe^x < 0$ sur $[0, +\infty[$, donc u est décroissante sur $[0, +\infty[$. Comme $u(0) = 0$, on a donc $u(x) \leq 0$ sur $[0, +\infty[$.

- c) Sur $[0, +\infty[$, le signe de $f(x) - x$ est celui de $u(x)$, donc la courbe C est située au-dessous de la droite (T).

6. On obtient la représentation graphique suivante:



Partie C

1. En remarquant que $(e^{-x})' = -e^{-x}$, on trouve que pour tout x de $[0, +\infty[$

$$F(x) = \ln(x + e^x)$$

- 2.a) La fonction f est décroissante sur $[n, n+1]$ puisque $a < n$ dès que $n=2$. Donc pour tout x de $[n, n+1]$ on a:

$$f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$$

d'où la relation demandée par intégration de cette inégalité entre n et $n+1$:

Pour tout $n \geq 2$, on a :

$$f(n+1) \leq v_n \leq f(n) \text{ et } f(n+2) \leq v_{n+1} \leq f(n+1)$$

donc $v_{n+1} \leq v_n$: la suite (v_n) est décroissante pour $n \geq 2$.

- b) Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n+1) = 0$, on en déduit que la suite (v_n) admet en $+\infty$ une limite nulle.

AVRIL 2003

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE A

CORRIGE DE L'EPREUVE DE CALCUL NUMERIQUE

DUREE : 2 HEURES

Exercice

1. Notons $z = a + ib$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, les solutions de l'équation

$$z^2 = 1 + i, \quad (0.1)$$

alors les réels a et b vérifient le système d'équations suivant

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 1 \\ 2ab = 1 \\ a^2 + b^2 = \sqrt{2} \end{cases} \iff \begin{cases} 2a^2 = 1 + \sqrt{2} \\ 2b^2 = \sqrt{2} - 1 \\ 2ab = 1 \end{cases}$$

Les réels a et b étant de même signe, on en déduit les deux solutions z_1 et z_2 de l'équation (0.1) :

$$z_1 = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2} - 1}{2}} = (\sqrt{2})^{1/2} \left[\frac{\sqrt{1 + \sqrt{2}}}{2^{3/4}} + i\frac{\sqrt{\sqrt{2} - 1}}{2^{3/4}} \right] \quad (0.2)$$

$$z_2 = -\sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2} - 1}{2}} = (\sqrt{2})^{1/2} \left[-\frac{\sqrt{1 + \sqrt{2}}}{2^{3/4}} - i\frac{\sqrt{\sqrt{2} - 1}}{2^{3/4}} \right] \quad (0.3)$$

2. Représentation de z_1 et de z_2 : voir en fin d'exercice.

3. La forme exponentielle du nombre complexe $1+i$ est $1+i = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)) = ((\sqrt{2})^{1/2} (e^{i\pi/8}))^2$; par conséquent le nombre complexe mis sous forme exponentielle $(\sqrt{2})^{1/2} (e^{i\pi/8})$ est solution de l'équation (0.1), il est donc égal à l'une de deux solutions trouvées dans la question 1. Comme la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe z_1 sont positives, z_1 a donc un argument compris entre 0 et $\pi/2$, par conséquent $z_1 = (\sqrt{2})^{1/2} (e^{i\pi/8})$. La forme exponentielle de z_1 et la relation (0.2) donne :

$$\begin{aligned}\cos(\pi/8) &= \frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{2^{3/4}}, \\ \sin(\pi/8) &= \frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{2^{3/4}}.\end{aligned}$$

4. La question précédente implique que

$$(1+i)^8 = 2^4 e^{i2\pi}. \quad (0.4)$$

D'un autre coté en utilisant la formule du binôme de Newton, on obtient :

$$\begin{aligned}(1+i)^8 &= \sum_{j=0}^8 C_8^j i^j \\ &= (C_8^0 - C_8^2 + C_8^4 - C_8^6 + C_8^8) + i(C_8^1 - C_8^3 + C_8^5 - C_8^7).\end{aligned} \quad (0.5)$$

Des relations (0.4) et (0.5), on déduit que

$$C_8^0 - C_8^2 + C_8^4 - C_8^6 + C_8^8 = 2^4 \quad \text{et} \quad C_8^1 - C_8^3 + C_8^5 - C_8^7 = 0.$$

5. D'après les formules d'Euler, on obtient

$$\begin{aligned}\cos^4(a) &= \left(\frac{e^{ia} + e^{-ia}}{2}\right)^4 \\ &= \frac{C_4^0 e^{4ia} + C_4^4 e^{-4ia} + C_4^1 e^{2ia} + C_4^3 e^{-2ia} + C_4^2}{2^4} \\ &= \frac{1}{2^3} [\cos(4a) + 4\cos(2a) + 3].\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin^3(a) &= \left(\frac{e^{ia} - e^{-ia}}{2i}\right)^3 \\ &= \frac{C_3^0 e^{3ia} - C_3^3 e^{-3ia} - C_3^1 e^{ia} + C_3^2 e^{-ia}}{(2i)^3} \\ &= \frac{1}{2^2} [-\sin(3a) + 3\sin(a)]\end{aligned}$$

6. En utilisant le fait que $\cos(6x)$ est la partie réelle du nombre complexe e^{i6x} , et en utilisant la formule de Moivre, on développe e^{i6x} et sa partie réelle est la valeur de $\cos(6x)$,

$$\begin{aligned}
 e^{i6x} &= (\cos(x) + i\sin(x))^6 \\
 &= C_6^6 \cos(x)^6 + iC_6^5 \cos(x)^5 \sin(x) - C_6^4 \cos(x)^4 \sin(x)^2 - iC_6^3 \cos(x)^3 \sin(x)^3 + \\
 &\quad C_6^2 \cos(x)^2 \sin(x)^4 + iC_6^1 \cos(x) \sin(x)^5 - C_6^0 \sin(x)^6 \\
 &= \left(\cos(x)^6 - C_6^4 \cos(x)^4 \sin(x)^2 + C_6^2 \cos(x)^2 \sin(x)^4 - \sin(x)^6 \right) + \\
 &\quad i \left(C_6^5 \cos(x)^5 \sin(x) - C_6^3 \cos(x)^3 \sin(x)^3 + C_6^1 \cos(x) \sin(x)^5 \right)
 \end{aligned}$$

On en déduit que

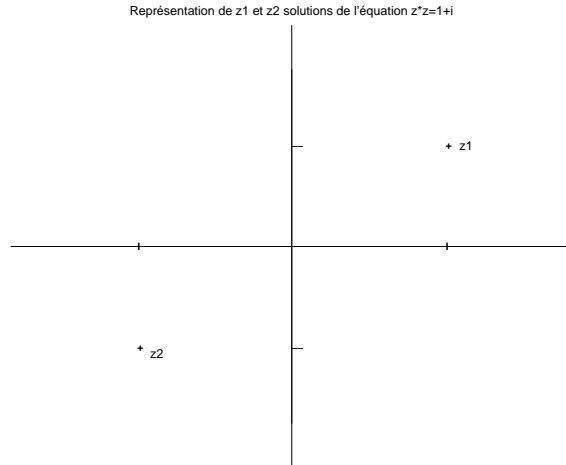
$$\cos(6x) = \cos(x)^6 - 15\cos(x)^4 \sin(x)^2 + 15\cos(x)^2 \sin(x)^4 - \sin(x)^6.$$

En utilisant le fait que $\sin(4x)$ est la partie imaginaire du nombre complexe e^{i4x} , et en utilisant la formule de Moivre, on développe e^{i4x} et sa partie imaginaire est la valeur de $\sin(4x)$,

$$\begin{aligned}
 e^{i4x} &= (\cos(x) + i\sin(x))^4 \\
 &= C_4^4 \cos(x)^4 + iC_4^3 \cos(x)^3 \sin(x) - C_4^2 \cos(x)^2 \sin(x)^2 - iC_4^1 \cos(x) \sin(x)^3 + C_4^0 \sin(x)^4 \\
 &= \left(\cos(x)^4 - C_4^2 \cos(x)^2 \sin(x)^2 + C_4^0 \sin(x)^4 \right) + i \left(C_4^3 \cos(x)^3 \sin(x) - C_4^1 \cos(x) \sin(x)^3 \right)
 \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\sin(4x) = 4\cos(x)^3 \sin(x) - 4\cos(x) \sin(x)^3.$$



Problème

1. $n = 210$.
- 2.

\mathcal{C}_i	n_i	f_i	F_i	L_i	$H_i = 300 \times h_i$	c_i
$\mathcal{C}_1 = [900, 1200[$	5	0.024	0.024	300	0.024	1050
$\mathcal{C}_2 = [1200, 1500[$	60	0.286	0.310	300	0.286	1350
$\mathcal{C}_3 = [1500, 1800[$	15	0.071	0.381	300	0.071	1650
$\mathcal{C}_4 = [1800, 2100[$	95	0.452	0.833	300	0.452	1950
$\mathcal{C}_5 = [2100, 2700[$	30	0.143	0.976	600	0.0715	2400
$\mathcal{C}_6 = [2700, 3300[$	5	0.024	1	600	0.012	3000

3. Voir tableau, question 2.

4. Fréquence cumulée et Médiane.

- a. Voir tableau, question 2.
- b. La proportion de salariés qui gagne moins de 1800 Euros est égale à 0.381.
- c. Voir graphe en fin de problème.
- d. La médiane est égale à $Me = 1878.982$ Euros.

5. Histogramme et Mode.

- a. Voir tableau, question 2.
- b. Voir tableau, question 2. On a choisi de faire figurer dans le tableau pour chaque classe \mathcal{C}_i , $i \in \{1, \dots, 6\}$, les quantités $H_i = 300h_i$.
- c. Voir graphe en fin de problème.

d. La classe modale est la classe $\mathcal{C}_4 = [1800, 2100[$

6. Moyenne et Variance.

a. Voir tableau de la question 2.

b.

$$\bar{x} = \frac{1}{210}(5250 + 81000 + 24750 + 185250 + 72000 + 15000) = \frac{383250}{210} = 1825.$$

Pour le calcul de la variance, on utilise le fait que

$$\text{Var} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^6 n_i c_i^2 - \bar{x}^2,$$

ce qui conduit au résultat suivant

$$\begin{aligned} \text{Var} &= \frac{1}{210}(5512500 + 109350000 + 40837500 + 361237500 + 172800000 + 45000000) - 3330625 \\ &= 168125. \end{aligned}$$

c. Pour calculer VarInter , il nous faut d'abord calculer la moyenne de chaque établissement P_1 et P_2 ;

$$\bar{x}_1 = 1757.625$$

$$\bar{x}_2 = 2040,$$

ce qui donne

$$\text{VarInter} = \frac{1}{210}[160(1757.625^2 - 1825^2) + 50(2040^2 - 1825^2)] = 13943.1074$$

d. Pour le calcul de la variance Intra, il faut d'abord calculer la variance sur chaque établissement P_1 et P_2 ;

$$\begin{aligned} \text{Var}_1 &= \frac{1}{160}(109350000 + 361237500 + 45000000) - \bar{x}_1^2 = \frac{515587500}{160} - 1757.625^2 \\ &= 133176.234 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}_2 &= \frac{1}{50}(5512500 + 40837500 + 172800000) - \bar{x}_2^2 = \frac{219150000}{50} - 2040^2 \\ &= 221400 \end{aligned}$$

On en déduit la variance Intra,

$$\text{VarIntra} = \frac{1}{210}(160 \times 133176.234 + 50 \times 221400) = \frac{32378197.44}{210} = 154181.8926$$

e. Il faut remarquer que

$$\text{VarIntra} + \text{VarInter} = \text{Var}.$$

