SESSION D' AVRIL 2003

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE ABIDJAN

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

1. $G_1 = \alpha_1^0 = 1$, $G_2 = \alpha_2^0 + \alpha_2 = 0$, $G_3 = i\sqrt{3}$ $G_4 = 2 + 2i$.

   Si n divise r alors $\alpha_n^r = 1$ et $H_r = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_n^{kr} = n$.

   Si n ne divise pas r alors $\alpha_n^r \neq 1$ et $H_r = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_n^{kr} = \frac{1-\alpha_n^{rn}}{1-\alpha_n^r} = 0$.

2. Les décompositions sont $X^5 - 1 = \Pi_{k=0}^{n-1}(X - \alpha_5^k)$ sur $\mathbb{C}$

   et $X^5 - 1 = (X-1)(X^2 - 2\cos(\frac{2\pi}{5})X + 1)(X^2 - 2\cos(\frac{4\pi}{5})X + 1)$ sur $\mathbb{R}$.

3. L'égalité $X^5 - 1 = (X-1)(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1)$ prouve $(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1) = (X^2 - 2\cos(\frac{2\pi}{5})X + 1)(X^2 - 2\cos(\frac{4\pi}{5})X + 1)$.

   L'égalité des deux polynômes donne les relations $2 + 4\cos(\frac{2\pi}{5})\cos(\frac{4\pi}{5}) = 1$ et $-2\cos(\frac{2\pi}{5}) - 2\cos(\frac{4\pi}{5}) = 1$.

   Les nombres $\cos(\frac{2\pi}{5})$ et $\cos(\frac{4\pi}{5})$ sont les solutions de l'équation $x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = 0$ et $\cos(\frac{4\pi}{5})$ est la solution négative.

   On trouve $\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $\cos(\frac{4\pi}{5}) = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$.

   $$G_5 = 1 + \alpha_5 + \alpha_5^4 + \alpha_5^9 + \alpha_5^{16} = 1 + 2\alpha_5 + 2\alpha_5^{-1} = \sqrt{5}.$$

4. L'expression de A_n est $A_n = (\alpha_n^{(i-1)(j-1)})_{i,j\in\{1,\cdots,n\}}$. $A_n^2 = (c_i^j)_{i,j\in\{1,\cdots,n\}}$ avec $c_i^j = \sum_{k=1}^{n} \alpha_n^{(i+j-2)(r-1)} = H_{i+j-2}$. D'après le calcul de H_r, on obtient $A_n^2 = nB_n$.

   $\mathrm{Tr}A_n = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_n^{k^2} = G_n$.

   $B_n^2 = (\sum_{r=1}^{n} b_i^r b_r^j)_{i,j\in\{1,\cdots,n\}} = I_n$.

5. Soit $u \neq 0$ un vecteur propre de A associé à λ alors $Au = \lambda u$ et $A^p u = \lambda^p u$, λ^p est une valeur propre de A^p.

   Si λ est une valeur propre de A_n alors λ^4 est une valeur propre de $n^2 I_n$ et donc $\lambda^4 = n^2$.

   A_n admet au plus quatre valeurs propres parmi $\{\sqrt{n}, -\sqrt{n}, i\sqrt{n}, -i\sqrt{n}\}$

6. Soit $x \in \mathbb{C}^n$ alors $x = \frac{1}{2}(x - u(x)) + \frac{1}{2}(x + u(x))$,
   $\frac{1}{2}(x - u(x)) \in \ker(u + Id)$, $\frac{1}{2}(x + u(x)) \in \ker(u - Id)$.
   Si $y \in \ker(u - Id) \cap \ker(u + Id)$ alors $u(y) = y = -y$ donc $y = 0$. On a montré que
   $$\mathbb{C}^n = \ker(u - Id) \oplus \ker(u + Id).$$
   Soit B_- une base de $\ker(u - Id)$ et B_+ une base de $\ker(u + Id)$, dans la base $B_- \cup B_+$ de $\mathbb{C}^n$, u admet une matrice diagonale. Donc U est diagonalisable. Comme $B_n^2 = I_n$, B_n est diagonalisable.

7. $v(e_1) = e_1$,

   pour tout $i \in \{0, \cdots, p\}$ $v(e_{i+2} + e_{n-i}) = e_{i+2} + e_{n-i}$ et

   $v(e_{i+2} - e_{n-i}) = -e_{i+2} + e_{n-i}$. Les vecteurs e_1, $(e_{i+2} - e_{n-i})_{i \in \in \{0, \cdots, p\}}$ et $(e_{i+2} + e_{n-i})_{i \in \in \{0, \cdots, p\}}$ forment une base de $\mathbb{C}^n$. Donc 1 est valeur d'ordre $p+1$ de base de vecteur propre $(e_{i+2} + e_{n-i})_{i \in \in \{0, \cdots, p\}} \cap (e_1)$ et -1 est valeur propre d'ordre p de base de vecteur propre $(e_{i+2} - e_{n-i})_{i \in \in \{0, \cdots, p\}}$.

   Le polynôme caractéristique de B_n est $\det(B_n - Xid) = -(X+1)^p (X-1)^{p+1}$.

8. $Q(X)$ et $(X - a_1)$ sont premiers entre eux car $a_i \neq a_1$ pour $i > 1$. Le théorème de Bezout prouve qu'il existe deux polynômes R et S tels que
   $$R(X)Q(X) + S(X)(X - a_1) = 1.$$
   Soit $x \in E$,
   $$x = R(w)Q(w)x + S(w)(w - a_1)x$$
   avec $R(w)Q(w)x \in \ker(w - a_1)$ et $S(w)(w - a_1)x \in \ker Q(w)$.

   Soit $y \in \ker(w - a_1 Id) \cap \ker Q(w)$ alors $y = R(w)Q(w)y + S(w)(w - a_1)y = 0$. Donc
   $$E = \ker(w - a_1 Id) \oplus \ker Q(w).$$
   Notons $\mathcal{P}_n$ la propriété "Pour tout espace vectoriel F de dimension n sur $\mathbb{C}$, tout endomorphisme v de F, et tout polynôme à racines simples de la forme $P(X) = \Pi_{i=1}^{d_P}(X - a_i)$ vérifiant $P(v) = 0$, alors
   $$F = \ker(v - a_1 Id) \oplus \ker(v - a_2 Id) \oplus \cdots \oplus \ker(v - a_{d_P} Id)."$$

La propriété $\mathcal{P}_1$ est vrai. On suppose que les propriétés $\mathcal{P}_j$ pour $j < n$ sont vraies. Montrons que $\mathcal{P}_n$ est vraie. Soit w un endomorphisme tel que $P(w) = 0$ avec $P(X) = (X - a_1)(X - a_2) \cdots (X - a_d)$ sur E un espace vectoriel de dimension n. D'après le début de la question,

$$E = \ker(w - a_1 Id) \oplus \ker Q(w).$$

Si $\ker(w - a_1 Id) = \{0\}$ alors $Q(w) = 0$ et on ré-applique la même propriété jusqu'à obtenir l'existence d'un j tel que

$E = \ker(w - a_j Id) \oplus \ker Q'(w)$ avec $\ker(w - a_j Id) \neq \{0\}$ pour $i < j$ $\ker(w - a_i Id) = \{0\}$ et $Q' = (X - a_{j+1}) \cdots (X - a_d)$. L'application $w' = w|_{\ker Q'(w)}$ est un endomorphisme de $\ker Q'(w)$, $Q'(w') = 0$. $\ker Q'(w)$ est de dimension strictement inférieure à n. En appliquant l'hypothèse de récurrence on obtient

$$\ker Q'(w) = \ker(w' - a_{j+1} Id) \oplus \cdots \oplus \ker(w' - a_d Id).$$

Pour $k > j$ $\ker(w - a_k Id) \subset \ker(Q'(w))$ donc $\ker(w - a_k Id) = \ker(w' - a_k Id)$. Finalement

$$\ker Q'(w) = \ker(w - a_{j+1} Id) \oplus \cdots \oplus \ker(w - a_d Id),$$

$$E = \ker(w - a_1 Id) \oplus \cdots \oplus \ker(w - a_d Id).$$

En prenant une base appropriée à cette décomposition on montre que w est diagonalisable.

9. A_n est solution de l'équation $A_n^4 - n^2 I_n = 0$.

   Soit $P(X) = (X + \sqrt{n})(X - \sqrt{n})(X + i\sqrt{n})(X - i\sqrt{n})$ on a $P(A_n) = 0$. Le résultat de la question précédente montre que A_n est diagonalisable de valeurs propres λ_k appartenant à l'ensemble $\{\sqrt{n}, -\sqrt{n}, i\sqrt{n}, -i\sqrt{n}\}$

10. La matrice D_n^2 est équivalente à la matrice A_n^2. Donc n est valeur propre de A_n^2 d'ordre $a + b$ et $-n$ est valeur propre d'ordre $c + d$. D'après la question 7, $a + b = p + 1$ et $c + d = p$.

11. Soit ϕ' de $T \times T$ sur $T \times T$ définie par $\phi'(u, v) = (u + v, v)$ si $u + v < n$ $\phi(u, v) = (u + v - n, v)$ si $u + v \geq n$. On a $\phi\phi' = Id$ donc ϕ est une bijection. Notons $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ et en utilisant $\alpha_n^n = 1$ on obtient

$$\begin{aligned} G_n \overline{G}_n &= \sum_{r \in T} \alpha_n^{r^2} \sum_{s \in T} \alpha_n^{-s^2} \\ &= \sum_{(r,s) \in T^2} \alpha_n^{r^2 - s^2} = \sum_{(r,s) \in T^2} \alpha_n^{\phi_1(r,s)^2 - \phi_2(r,s)^2} \end{aligned} \qquad (1)$$

On a $\alpha_n^n = 1$ donc $G_n\overline{G}_n = \sum_{(r,s)\in T^2} \alpha_n^{(r-s)^2-s^2}$.

$$G_n\overline{G}_n = \sum_{(r,s)\in T^2} \alpha_n^{r^2-2sr} = \sum_{r\in T} \alpha_n^{r^2} \sum_{s\in T} \alpha_n^{-2sr} = \sum_{r\in T} \alpha_n^{r^2} H_{-2r} \tag{2}$$

En utilisant le fait que H_{-2r} est non nul et vaut n si et seulement si n divise $2r$, donc si est seulement si n divise r (car n est impair), soit encore si et seulement si $r = 0$ (car $r \in T$). Finalement

$$G_n\overline{G}_n = \sum_{(r,s)\in T^2} \alpha_n^{r^2-2sr} = \sum_{r\in T} \alpha_n^{r^2} H_{-2r} = \alpha_n^0 n = n \tag{3}$$

Finalement $|G_n| = \sqrt{n}$.

12. $|\mathrm{Tr}A_n| = |a\sqrt{n} - b\sqrt{n} + ic\sqrt{n} - id\sqrt{n}| = n$.
Donc $(a-b)^2 + (c-d)^2 = 1$.

13. On suppose que $n = 2p+1$ avec $p \in \mathbb{N}$. A_n est une matrice circulaire donc

$$\begin{aligned}\det A_n = \Pi_{(i,j)\in T^2, i<j}(\alpha_n^i - \alpha_n^j) = \Pi_{(i,j)\in T^2, i<j}\alpha_n^i(1-\alpha_n^{j-i})\\ = i^{2(n-1)}\Pi_{k=1}^{n-1}(1-\alpha_n^{-k})^{n-k}\\ = i^{2(n-1)}\Pi_{k=1}^{n-1}(1-\alpha_n^{n-k})^{n-k}\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}(\det A_n)^2 &= i^{4(n-1)}\Pi_{k=1}^{n-1}(1-\alpha_n^k)^k \Pi_{k=1}^{n-1}(1-\alpha_n^{-k})^{n-k}\\ &= i^{4(n-1)}\Pi_{k=1}^{n-1}(1-\alpha_n^{-k})^n \Pi_{k=1}^{n-1}(\frac{(1-\alpha_n^{-k})}{(1-\alpha_n^k})^k\\ &= i^{4(n-1)}n^n \Pi_{k=1}^{n-1}(\frac{(1-\alpha_n^{-k})}{(1-\alpha_n^k})^k = i^{2p(2p+1)}n^n\end{aligned} \tag{5}$$

Donc $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = i^{p(2p+1)}n^{\frac{n}{2}}$. On en déduit
$\det(A_n) = i^{c+d+2b+2d}(\sqrt{n})^n = i^{p(2p+1)}n^{\frac{n}{2}}$, donc il existe $m' \in \mathbb{Z}$ tel que

$$p + 2b + 2d = p(2p+1) + 4m'.$$

En simplifiant on trouve $b + d = p^2 + 2m'$. Comme $p^2 - p$ est divisible par deux il existe $m'' \in \mathbb{Z}$ tel que $p^2 = p + 2m''$ et on trouve $b+d = p+2(m'+m'')$. Comme $(a-b)^2 + (c-d)^2 = 1$ et $a-b$ et $c-d$ sont des entiers, les valeurs de a b c et d vérifient l'un des quatre cas suivants $a = b$ et $c = d+1$, $a = b$ et $c+1 = d$, $a = b+1$ et $c = d$, $a+1 = b$ et $c = d$.

Ces quatre cas s'écrivent

$$a = b = \frac{p+1}{2}, d = \frac{p-1}{2}, c = \frac{p+1}{2}$$

$$a = b = \frac{p+1}{2}, c = \frac{p-1}{2}, d = \frac{p+1}{2}$$
$$a = 1 + \frac{p}{2}, b = \frac{p}{2}, c = \frac{p}{2}, d = \frac{p}{2}$$
$$a = \frac{p}{2}, b = 1 + \frac{p}{2}, c = \frac{p}{2}, d = \frac{p}{2}$$

La condition $b + d = p[2]$ exclut le deuxième et le quatrième cas.

Les coefficients a, b, c, d sont des entiers,

si p est pair $a = 1 + \frac{p}{2}$ $b = \frac{p}{2}$ $c = \frac{p}{2} d = \frac{p}{2}$ et

si p est impair $a = b = \frac{p+1}{2}$ $d = \frac{p-1}{2}$ $c = \frac{p+1}{2}$.

14. $\mathrm{Tr} A_n = \sqrt{n}(a - b + ic - id)$.

    Si p est pair $\mathrm{Tr} A_n = \sqrt{n}$, si p est impair $\mathrm{Tr} A_n = i\sqrt{n}$.

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2003

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

CORRIGE DE LA DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

EXERCICE n° 1

On considère deux variables réelles discrètes X et Y définies par $X=(x_1,...,x_n)$ et $Y=(y_1,...,y_n)$.

❶ On pose : $f(a,b)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-ax_i-b)^2$. Cette fonction est strictement convexe et admet donc un minimum pour les valeurs qui annulent les deux dérivées partielles, soit :

$\frac{\partial f}{\partial a}=-2\sum_{i=1}^{n}(y_i-ax_i-b)\,x_i=0$ et $\frac{\partial f}{\partial b}=-2\sum_{i=1}^{n}(y_i-ax_i-b)=0$

La résolution du système donne :

$b=\overline{Y}-a\overline{X}$ et $a=\dfrac{\sum_i x_i y_i-n\overline{XY}}{\sum_i x_i^2-n\overline{X}^2}$

❷ On trouve $\overline{X}=14$, $\overline{Y}=50$, d'où $a=1{,}56$ et $b=28{,}125$

EXERCICE n° 2

Soit (u_n) une suite de nombres réels. A cette suite, on associe deux autres suites (s_n) et (r_n) définies par :

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \quad \text{et} \quad r_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{k}$$

❶ Pour $n = 2$, $r_2 = \frac{s_1}{2} + \frac{s_2}{2} = u_1 + \frac{u_2}{2}$. La relation est donc vérifiée.

$$r_{n+1} = r_n + \frac{u_{n+1}}{n+1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{s_k}{k(k+1)} + \frac{s_n}{n} + \frac{u_{n+1}}{n+1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{s_k}{k(k+1)} + \frac{s_n}{n(n+1)} + \frac{s_{n+1}}{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{s_k}{k(k+1)} + \frac{s_{n+1}}{n+1}$$

❷ $r_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{s_k}{k(k+1)} + \frac{s_n}{n}$

La première série est convergente et le deuxième terme tend vers zéro par hypothèse. La suite (r_n) a donc une limite finie et la série de terme général $\frac{u_n}{n}$ converge.

❸ Soit $s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$. Pour n grand, $|s_n| \leq l$ et $\left|\frac{s_n}{n(n+1)}\right| \leq \frac{l}{n(n+1)}$, donc l'hypothèse 2a) est vérifiée. De plus $\lim_{n \to \infty} \frac{s_n}{n} = 0$, et la série de terme général $\frac{u_n}{n}$ est convergente d'après la question précédente.

❹ On vérifie que : $\lim_{n \to \infty} \frac{s_n}{n} = 0$ et que la série de terme général $\frac{s_n}{n(n+1)}$ est convergente.

❺. On considère la suite (s_n) définie par :

$$s_n = \begin{cases} 2k & si \;\; n = 2k \\ -(2k+1) & si \;\; n = 2k+1 \end{cases}$$. Elle vérifie les relations demandées. En effet :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{s_k}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{E(n/2)} \frac{1}{2k+1} - \sum_{k=0}^{E(n+1/2)-1} \frac{1}{2k+2} = \sum_{k=1}^{E(n/2)} \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} - \frac{1}{2}$$

(série convergente) et $\lim_{n \to \infty} \frac{s_n}{n}$ n'existe pas.

EXERCICE n° 3

On considère deux urnes A et B. L'urne A contient deux jetons numérotés 0 et l'urne B deux jetons numérotés 1. On choisit au hasard un jeton dans A et un jeton dans B que l'on échange en les replaçant dans B et A (étape 1).Puis on recommence la même opération.
Soit X_n la variable aléatoire égale à la somme des numéros des deux jetons dans l'urne A après n échanges.

❶ Les valeurs possibles de X_n sont 0, 1 ou 2.

❷ Calcul de la probabilité de passage d'un état n à un état $n+1$:

Etat n	Etat $n+1$	Probabilité P
(0, 0)	(0, 1)	1
(1, 1)	(0, 1)	1
(0, 1)	(0, 0)	1/4
(0, 1)	(0, 1)	2/4
(0, 1)	(1, 1)	1/4

❸ $a_{n+1} = P(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{4} b_n$,

$c_{n+1} = P(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{4} b_n$ et $b_{n+1} = P(X_{n+1} = 1) = a_n + c_n + \frac{1}{2} b_n$, puis

$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$, d'où $T = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$ et $V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

❹ Du système précédent, on peut en déduire que si les suites convergent, alors $\lim_n a_n = \lim_n c_n = 4 \lim_n b_n$

La matrice T admet pour valeurs propres : 1, 0 et –1/2. Comme ces valeurs sont distinctes la matrice est diagonalisable.
Le sous espace propre associé à la valeur propre 1 est engendré par (1, 4, 1).
Le sous espace propre associé à la valeur propre 0 est engendré par (1, 0, -1).
Le sous espace propre associé à la valeur propre -1/2 est engendré par (1, -2, 1).

On obtient : $T^n = P\Delta^n P^{-1}$, où $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$, $\Delta^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1/2)^n \end{pmatrix}$,

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$V_{n+1} = T^n V_1 = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1+1/2^n \\ 4-1/2^{n-1} \\ 1+1/2^n \end{pmatrix}$

En conclusion $\underset{n}{Lim}\, a_n = \underset{n}{Lim}\, c_n = \frac{1}{6}$ et $\underset{n}{Lim}\, b_n = \frac{2}{3}$

EXERCICE n° 4

❶ On vérifie que $f(-x) = -f(x)$ et $\underset{x\to 0}{Lim}\, f(x) = f(0) = 0$

❷ Vérifions que f est dérivable à l'origine : $\underset{x\to 0}{Lim} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \underset{x\to 0}{Lim} \frac{e^{x^2}-1}{x^2} = 1$. Pour $x \neq 0$, $f'(x) = \frac{e^{x^2}(2x^2-1)+1}{x^2} = \frac{u(x^2)}{x^2}$.

Puis $u'(t) = (2t+1)\exp(t)$, donc $u(t) > 0$ sur R^{+*}.

La fonction f est strictement croissante et continue sur R, elle est donc bijective et admet une fonction réciproque également impaire.

❸ $e^{x^2} = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{(x^2)^2}{2!} + ... + \frac{(x^2)^n}{n!} + o(x^{2n})$

$$\frac{e^{x^2}-1}{x} = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{2!} + ... + \frac{x^{2n-1}}{n!} + o(x^{2n-1})$$

Pour $x \neq 0$, on a : $f(x) = x + \frac{x^3}{2!} + ... + \frac{x^{2n-1}}{n!} + x^{2n-1}e(x)$ avec $\underset{x\to 0}{Lim}\, e(x) = 0$.

On prolonge e en 0 par $e(0) = 0$

❹ $f(x) = x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{6} + o(x^5)$

Pour f^{-1}, il suffit de résoudre le système linéaire obtenu en écrivant :

$f^{-1}(x) = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + o(x^5)$ et

$$f^{-1} o\ f(x) = x \Rightarrow a_1 (x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{6}) + a_3 (x^3 + 3\frac{x^5}{2}) + a_5 x^5 + o(x^5) = x$$

d'où le système :

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ \frac{a_1}{2} + a_3 = 0 \\ \frac{a_1}{6} + \frac{2}{3} a_3 + a_5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_3 = -\frac{1}{2} \\ a_5 = \frac{7}{2} \end{cases}$$

On obtient : $f^{-1}(x) = x - \frac{1}{2} x^3 + \frac{7}{12} x^5 + o(x^5)$

EXERCICE n° 5

❶ Comme A, B et $A+B$ sont des parties majorées non vides de R, les bornes supérieures respectives existent. Notons $a = SupA$ et $b = SupB$.

a) $\forall x \in A, x \leq a$ et $\forall y \in B, y \leq b$, donc $\forall z \in A+B, z \leq a+b$.

$a+b$ est donc un majorant de $A+B$.

b) $\forall e > 0, \exists x \in A / x > a - \frac{e}{2}$ et $\exists y \in B / y > b - \frac{e}{2}$, donc $\exists z = x + y \in A+B / z > a+b-e$.

$a+b$ est donc le plus petit des majorants de $A+B$.

Ces deux assertions montrent que

$$Sup(A+B) = Sup(A) + Sup(B)$$

❷ Comme A, B et AB sont des parties majorées non vides de R^+, les bornes supérieures respectives existent. Notons encore $a = SupA$ et $b = SupB$.

a) $\forall x \in A, x \leq a$ et $\forall y \in B, y \leq b$, donc $\forall z \in AB, z \leq ab$ (car toutes les valeurs sont positives).

ab est donc un majorant de AB.

b) $\forall e > 0, \exists x \in A / x > a - e$ et $\exists y \in B / y > b - e$, donc $\exists z = xy \in AB / z > ab - e(a+b-e)$. Il suffit de choisir $e < Min(a,b)$.

ab est donc le plus petit des majorants de AB.

Ces deux assertions montrent que

$$Sup(AB) = Sup(A) \times Sup(B)$$

EXERCICE n° 6

❶ Pour que l'intégrale $f(x)=\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$ soit définie, il faut $1-t^2>0$, soit $-1<t<1$. Cette fonction étant impaire, il suffit de faire l'étude pour $x\geq 0$. Pour $x=1$, on a une intégrale généralisée de seconde espèce convergente (en effet au voisinage de 1, $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\approx\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-t}}$ et l'intégrale est convergente). Donc l'intégrale est définie sur $[-1,1]$.

Sa dérivée est : $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. La fonction est continue et strictement croissante, elle est donc bijective et admet une application réciproque.

❷ - On a $g'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{x^4}{4}}}$, g est impaire et $g''(x)=\frac{\frac{-x^3}{2}}{(1+\frac{x^4}{4})^{3/2}}$.

La fonction est donc strictement croissante, concave sur R^+ et convexe sur R^-

$$g(x)=\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+\frac{t^4}{4}}}dt$$

- Pour $0\leq x\leq 1$, $1\leq\sqrt{1+\frac{x^4}{4}}\leq\sqrt{\frac{5}{4}}$, d'où $\frac{2}{\sqrt{5}}\leq g'(x)\leq 1$

  Pour $x\geq 1$, $g'(x)<\frac{2}{x^2}$ (on vérifie cette inégalité par élévation au carré)
- Pour $x\geq 1$, on a :

$$0\leq g(x)=\int_0^x\frac{1}{\sqrt{1+\frac{t^4}{4}}}dt\leq\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+\frac{t^4}{4}}}dt+\int_1^x\frac{1}{\sqrt{1+\frac{t^4}{4}}}dt\leq\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+\frac{t^4}{4}}}dt+\int_1^x\frac{2}{t^2}dt\leq\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+\frac{t^4}{4}}}dt+2$$

- La fonction g est continue, strictement croissante et majorée, donc elle admet une limite finie a quand $x\to+\infty$.

❸ g est inversible. Notons j l'application réciproque de g, on a :

$$j(x)=j(0)+xj'(0)+\frac{x^2}{2!}j''(0)+\frac{x^3}{3!}j^3(0)+o(x^3)$$

Par ailleurs, $j'(x)=\sqrt{1+\frac{j''(x)}{4}}$, $j'(0)=1, j''(0)=0$ (j *impaire*) et $j^3(0)=0$

On obtient : $j(x)=x+o(x^3)$

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2003

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE
OPTION MATHEMATIQUES

CORRIGE DE L'EPREUVE DE CALCUL NUMERIQUE
DUREE : 2 heures

- **Exercice 1 :**

1. $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(\tilde{x})\frac{(x-x_0)^2}{2}$ avec $\tilde{x} \in \mathcal{B}(x_0; \|x - x_0\|_E)$.
2. Une partie de l'énoncé a été omise ici. Il fallait lire

$$f(x) - f(x_0) \geq f'(x_0)(x - x_0) \Longleftrightarrow f \text{ convexe}$$

Et ainsi avec le point précédent, on obtient $f'' > 0 \Longrightarrow f$ convexe.
3. Plusieurs méthodes peuvent être utilisées du moment qu'elles mettent en application les points précédents. On peut par exemple étendre le résultat du point 2 au cas où $f" \geq 0$. Comme $f"(x) = 12x^2 \geq 0$, on applique ensuite la définition d'une fonction convexe avec $\lambda = \frac{1}{2}$.

- **Exercice 2 :**

1. On note

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} dx$$

Afin de simplifier les calculs, on peut effectuer un premier changement de variable défini par $\tilde{x} = \frac{x-m}{\sigma}$. On obtient

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\left(-\frac{\tilde{x}^2}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}} d\tilde{x}$$

Et, en passant par

$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)}{2\pi} dxdy$$

Il suffit maintenant d'effectuer un changement de variables en coordonnées polaires classique pour obtenir $I = 1$.
2. Soit ϕ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\phi(t) = \exp\left(-\frac{t^2\sigma^2}{2}\right)$.
Soit

$$\Phi_n(t) = \phi(\frac{t}{\sqrt{n}})^n$$

$$= \left(\exp\left(-\frac{\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2\sigma^2}{2}\right)\right)^n$$
$$= \exp\left(-\frac{t^2\sigma^2}{2}\right)$$

Ainsi la limite de $\Phi_n(t)$ est égale à $\phi(t)$ pour tout t.

- **Exercice 3 :**

  1. $xf(x)$ est divergente de première espèce sur $\mathbb{R}^+$ car équivalente à $\frac{1}{x}$.
  2. $xf(x)$ est divergente de première espèce sur $\mathbb{R}^+$ et sur $\mathbb{R}^-$, ces deux intégrales valant $+\infty$ dans les deux cas. On obtient donc une intégrale sur $\mathbb{R}$ divergente de seconde espèce (i.e : la loi de Cauchy ne possède pas d'espérance).

- **Exercice 4 :**

  1. Soient $f, g \in C([0,1])$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $\|\lambda f\|_1 = |\lambda|\|f\|_1$ et $\|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$. $f = 0$ entraîne $\|f\|_1 = 0$, de plus comme f est continue sur $[0;1]$ et que $|f|$ est positive $\|f\|_1 = 0$ entraîne $f = 0$. Enfin $\|f\|_1$ est toujours positive.

     (a) On considère
     $$\begin{cases} f_n(x) = 0 \quad si\ x \in [0,1/2] \\ f_n(x) = nx - n/2 \quad si\ x \in]1/2, 1/2+1/n[\\ fn(x) = 1 \quad si\ x \in [1/2+1/n, 1] \end{cases}$$

     (b) Soit n et p deux entiers non nuls quelconque, $|f_n - f_p| \leq |f_n| + |f_p|$ est toujours inférieur à 2. De plus f_n coincide avec f_p hors de $]1/2, 1/2+1/p[$. Soit n et p deux entiers avec $n > p$, on a alors
     $$\|f_n - f_p\|_1 = \int_{1/2}^{1/2+1/p} |f_n(x) - f_p(x)|dx \leq \frac{2}{p}$$
     Ce qui prouve que f_n est de Cauchy.

     (c) On raisonne par l'absurde. Supposons qu'il existe une fonction f continue, limite de f_n au sens de la norme 1. On a
     $$\int_0^{1/2} |f(x)|dx = \int_0^{1/2} |f_n(x) - f(x)|dx \leq \|f_n - f\|_1$$
     et pour $n \geq p$,
     $$\int_{1/2+1/p}^{1} |1 - f(x)|dx \leq \int_{1/2+1/p}^{1} |f_n(x) - f(x)|dx \leq \|f_n - f\|_1$$

     (d) En passant à la limite dans les deux inégalités, on obtient d'une part
     $$\int_0^{1/2} |f(x)|dx = 0$$
     Et ainsi f est nulle sur $[0, 1/2]$. Et d'autre part, pour n et p tendant vers l'infini, on obtient également $\int_{1/2}^{1} |1 - f(x)|dx = 0$. Et ainsi, $f(1/2) = 1$. Ces deux points sont en contradiction ($f(1/2) = 0$ et $f(1/2) = 1$).
     On a donc trouvé une suite de Cauchy qui ne converge pas pour cette norme. L'espace associé avec cette norme n'est donc pas complet.

- **Exercice 5 :**

1. On appelle $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres de A sont 1+i et 1-i respectivement.
2. Les espaces propres associés sont engendrés par $T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix}$ et $\bar{T} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2+i \end{pmatrix}$ sur la base canonique de $\mathbb{C}^2$.
3. $T = U + iV$ et $\bar{T} = U - iV$.
4. On pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$. la solution générale du système est

$$X_n = \alpha(1+i)^n T + \bar{\alpha}(1-i)^n \bar{T}$$

En développant les valeurs propres sous la forme trigonométrique on obtient

$$X_n = \alpha\sqrt{2}^n(cos(\frac{n\pi}{4}) + isin(\frac{n\pi}{4}))T + \bar{\alpha}\sqrt{2}^n(cos(\frac{n\pi}{4}) - isin(\frac{n\pi}{4}))\bar{T}$$

et en notant $\alpha = a + ib$ on a

$$X_n = 2\sqrt{2}^n \left[a\left(cos(\frac{n\pi}{4})U - sin(\frac{n\pi}{4})V\right) - b\left(sin(\frac{n\pi}{4})U + cos(\frac{n\pi}{4})V\right)\right]$$

- **Exercice 6 :**

A tout instant on a $r(t)/h(t) = tan(30) = 1/\sqrt{3}$ où $r(t)$ est le rayon du disque formé par la surface du liquide à l'instant t.
L'aire $A(t)$ est donc de $\pi r^2(t) = \pi h^2(t)/3$. On a , par hypothèse $a = 5.10^{-5}m^2$. Ainsi, en utilisant la dynamique donnée, on obtient

$$h'(t) = -\sqrt{2g}\frac{a}{A(t)\pi}\sqrt{h(t)} = -3a\sqrt{2g}h^{\frac{3}{2}}(t)$$

On obtient l'équation différentielle du premier ordre

$$h'(t) = -Kh^{-\frac{3}{2}}(t)$$

avec $K = \sqrt{19,6}.15.10^{-5}/\pi$. Ainsi

$$h(t) = (-2,5Kt + C)^{2/5}$$

Puisque $h(0) = 0,1$, on a $C = (0,1)^{5/2} = 0,00316$. L'entonnoir est vide si $a = A$ et $h(t) = 6,9.10^{-3}$. On trouve $T = 6$ secondes.