

ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE
APPLIQUEE (ENEA)
DEPARTEMENT DE STATISTIQUE
BP 5084
DAKAR -SENEGAL

INSTITUT SOUS REGIONAL DE
STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
YAOUNDE - CAMEROUN

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2002

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIES A et B

ORDRE GENERAL

DUREE : 3 HEURES

Les candidats traiteront l'un des 3 sujets au choix.

SUJET N° 1

Pourquoi suffit-il d'un tableau noir et d'un morceau de craie pour établir des vérités mathématiques, alors que le physicien a besoin d'observer et d'expérimenter ?

SUJET N° 2

Expliquer et apprécier cette assertion que "la liberté d'indifférence est le plus bas niveau de la Liberté".

Descartes "Méditations"

SUJET N° 3

Un philosophe a défini l'intelligence "la fonction qui adapte des moyens à des fins". Cette formule vous paraît-elle présenter les conditions d'une bonne définition ?

**ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN**

AVRIL 2002

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B

OPTION MATHEMATIQUES

EPREUVE DE CALCUL NUMERIQUE

DUREE : 2 HEURES

Exercice N° 1

On considère tous les nombres entiers naturels que l'on peut écrire en permutant les chiffres : 1, 2, 3, 4, 5.

- 1) Combien peut-on former de nombres de cette manière ?
- 2) On range ces nombres dans l'ordre croissant.
 - a) Quel est le plus petit de ces nombres ? Quel est le plus grand ?
 - b) Quel est le 40^{ième} ?
 - c) Quel rang occupe 43251 ?
- 3) Quelle est la somme de tous ces nombres ?

Exercice N° 2

\mathbf{R}^{**} désigne l'ensemble des nombres réels strictement positifs.

Soit la fonction numérique définie sur \mathbf{R}^{**} par :

$$f(x) = x - 4 + \frac{1}{4} \ln|x|$$

où \ln est la fonction logarithme népérien.

1) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet, dans \mathbf{R}^{**} , une solution unique m telle que $3 < m < 4$

2) Soit g la fonction numérique définie sur \mathbf{R}^{**} par :

$$g(x) = 4 - \frac{1}{4} \ln|x|$$

a) Etudier les variations de g et montrer que l'image par g de l'intervalle $[3,4]$ est contenue dans l'intervalle $[3,4]$.

b) Montrer que, pour tout x de $[3,4]$, on a $|g'(x)| \leq \frac{1}{12}$

3) On considère la suite (u_n) , n appartenant à l'ensemble des entiers naturels \mathbf{N} , définie par $u_0=3$ et, pour tout n de \mathbf{N} , $u_{n+1}=g(u_n)$.

a) Démontrer que, pour tout n de \mathbf{N} , on a $3 \leq u_n \leq 4$

b) Montrer que, pour tout n de \mathbf{N} , $|u_{n+1} - m| \leq \frac{1}{12} |u_n - m|$. En déduire que, pour tout n de \mathbf{N} , $|u_n - m| \leq \frac{1}{12^n}$

c) Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

d) En déduire une valeur approchée de m à 0,01 près.

Exercice N° 3

On calcule la valeur actuelle nette à la période $t=0$ sous la forme :

$$VAN = -I_0 + \sum_{t=1}^n \frac{f_t}{(1+a)^t}$$

où : I_0 est la mise de fonds initiale, n la durée de vie de l'équipement et f_t le flux de liquidités net de l'investissement à la période t . Le taux d'actualisation noté « a » dans la formule constate une différence de valeur entre une somme disponible aujourd'hui et la même somme disponible dans le futur. L'actualisation permet alors de comparer des sommes disponibles à des périodes différentes, en ramenant chacune d'entre elles à sa valeur actuelle, en $t=0$.

Une entreprise dispose de 175.000 euros qu'elle peut utiliser pour investir.

En matière d'investissement, l'entreprise a le choix entre les deux projets A et B, dont la mise de fonds initiale, en $t=0$, est la même : 175.000 euros. Les résultats comptables attendus par l'entreprise sur les périodes suivantes sont donnés dans le tableau suivant :

Périodes	1	2	3	4	5
Projet A	130.000	120.000	120.000	40.000	20.000
Projet B	30.000	30.000	100.000	120.000	150.000

En supposant que le taux d'actualisation est nul, puis est égal à 12%, calculez la valeur actuelle nette de chaque projet.

ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE APPLIQUEE (ENEA)
DEPARTEMENT DE STATISTIQUE
BP 5084
DAKAR - SENEGAL

INSTITUT SOUS REGIONAL DE
STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
YAOUNDE - CAMEROUN

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2002

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIES A

et

B OPTION MATHEMATIQUES

EPREUVE DE CONTRACTION DE TEXTE

DUREE : 3 HEURES

Ce texte est tiré du livre "LA SCIENCE à l'usage des non-scientifiques", par Albert Jacquard, paru aux éditions Calmann-Lévy, en septembre 2001. Il peut être résumé en 240 mots plus ou moins 10%.

Depuis que Jacques Monod en a fait le titre d'un livre retentissant, l'association du "hasard" et de la "nécessité" est présente dans tous les esprits. Ces deux mots forment un couple indissociable et antagoniste aussi définitivement lié, par la vertu d'un titre sur une couverture, que "le Rouge et le Noir", "l'Etre et le Néant" ou "Dr Jekyll et Mr. Hyde". Cette accointance nous incite à définir chacun des membres du couple par référence à l'autre, au risque d'un cheminement circulaire semblable à celui des dictionnaires lorsqu'ils définissent, par exemple, la vie comme "le propre des êtres qui sont nés et ne sont pas encore morts" et la mort comme "la cessation de la vie". Le *hasard* serait-il seulement ce qui reste lorsqu'on a épuisé la liste des facteurs participant à la *nécessité*, et la *nécessité* ce qui reste lorsque le *hasard* n'intervient plus ? Une définition moins tautologique est évidemment nécessaire ; elle va mettre en évidence l'intervention d'un troisième terme, la *finalité*.

Ces concepts s'introduisent à propos des attitudes possibles lorsque nous cherchons à expliquer les événements dont nous sommes les témoins. Nous pouvons admettre qu'ils sont la conséquence *nécessaire* de l'état du monde à l'instant où ils se produisent, état qui résulte de son histoire antérieure ; le présent est alors le produit du passé. Nous pouvons aussi renoncer à chercher un rapport entre ces événements et les conditions de leur survenue ; le présent n'est alors que le produit sans cause de lui-même, l'oeuvre du *hasard*. Nous pouvons enfin admettre qu'ils ont eu lieu pour rendre possible un événement futur, qu'ils sont au service d'une *fin*, le présent est alors le produit de l'avenir.

Ces trois termes : nécessité, hasard, finalité, sont donc la traduction de notre opinion sur le sens dans lequel agit la flèche du temps.

De la pensée magique à Démocrite

La réponse la plus simple, lorsque nous essayons de comprendre ce qui se passe autour de nous, est d'admettre que tout événement est le résultat des décisions d'un être puissant et inconnu. Nous ne sommes plus intrigués par la tempête si nous l'attribuons à une colère de Poséïdon, par la foudre si elle est une manifestation de la puissance de Zeus. Tout ce qui survient dépend des volontés ou des caprices des dieux. Ceux-ci sont décrits comme des personnages semblables aux humains ; ils sont animés par des intentions, par le désir de parvenir à un résultat. La pensée magique est donc fondamentalement finaliste : elle admet que le présent est au service d'un futur choisi par une divinité.

L'avantage de cette vision est de fournir une explication de tout ; il suffit, lorsque les divinités déjà en place dans le panthéon collectif ne sont pas suffisantes, d'ajouter de nouveaux personnages. Le prix à payer est d'accepter une attitude de soumission, car si tout dépend des dieux, chacun de nous en est le jouet.

C'est le refus de cette soumission qu'exprime la phrase de Démocrite qui a inspiré son titre à Jacques Monod : " Tout ce qui existe dans l'univers est le fruit du hasard et de la nécessité ". Que pouvaient signifier ces mots pour un philosophe grec quatre siècles avant Jésus-Christ ?

Le sens de cette affirmation doit être cherché moins dans les deux termes énoncés que dans l'absence du troisième. En fait, en omettant de citer la finalité, Démocrite recuse l'influence des dieux.

Il propose de rendre compte de la succession des événements en admettant certaines régularités, les "lois de la nature", qui à chaque instant transforment l'état du monde, et qui participent à la *nécessité* ; mais il reconnaît que ces lois n'expliquent pas tout ; force est de constater qu'une part des faits échappe à leur rigueur ; cette part est attribuée au *hasard*.

De l'action des dieux, de la finalité qu'ils introduisent, il n'est plus question. Ce faisant, Démocrite fonde l'attitude scientifique.

Celle-ci consiste à tenir compte d'une évidence : l'avenir n'a pas d'existence, il est donc exclu de tenir compte de lui pour expliquer le présent. Les efforts de compréhension produits par les scientifiques seraient rendus stériles au départ s'ils admettaient qu'un fait se produisant aujourd'hui puisse être expliqué par la réalité de demain.

Il ne s'agit pas là d'une croyance à imposer, mais d'une règle du jeu à respecter. Il est parfaitement possible d'admettre que tout fait résulte de la volonté d'un Dieu (ou de dieux) veillant à la réalisation du programme qu'il a (ou qu'ils ont) adopté, et intervenant, en permanence ou par impulsions, pour atteindre la fin, qu'il a (qu'ils ont) décidée. Rien ne peut prouver que cette hypothèse "finaliste", est fautive. Mais l'accepter est rendre vaine toute tentative d'explication rationnelle des faits observés. Entrer dans le cheminement scientifique, c'est prendre pour règle de ne pas y recourir.

Cette attitude consiste à regarder le monde réel avec la volonté de le déchiffrer, à se sentir simultanément immergé en lui et face à lui, à lui poser des questions en sachant que les réponses seront souvent provisoires et toujours partielles. Choisir cette voie manifeste une orgueilleuse volonté d'autonomie. Certes, il faut en payer le prix de doutes, de tâtonnements, de frustrations, mais elle procure aussi (à vrai dire depuis peu) de magnifiques récompenses. Comprendre l'enchaînement des causes et des effets permet parfois de modifier leur succession et d'engager la suite des événements dans une direction que la nature n'aurait pas spontanément suivie. L'exemple le plus clair est celui des maladies ; comprendre leur cause permet de plus en plus souvent de les guérir, alors que nous en étions autrefois réduits aux incantations et aux remèdes empiriques. Nous savons, grâce à la science, sauver des vies : si le roi est à l'agonie, une piqûre d'antibiotiques (attitude se référant à la nécessité) peut être plus efficace que l'attitude finaliste des chants implorant " God save the King ".

On comprend l'émotion ressentie par Jacques Monod en découvrant Démocrite : c'est le programme de la science que celui-ci a tracé il y a vingt-quatre siècles.

Les déguisements de la finalité

Certains raisonnements scientifiques donnent, à vrai dire, l'impression de suivre une démarche finaliste. Tel est le cas lorsque le processus étudié est présenté comme tendant vers un certain objectif, notamment vers l'optimisation de tel ou tel paramètre. Ainsi, selon la mécanique classique, le cheminement d'un système matériel pour passer d'un état initial à un état final est expliqué par le *principe de moindre action* : la trajectoire suivie par les différents éléments de ce système est celle qui rend minimale la somme des actions nécessaires. (ce concept d'action est défini à partir de celui d'impulsion, c'est à dire du produit de la masse par la vitesse : un objet de masse m et de vitesse v a une impulsion $p = mv$; lorsque cet objet parcourt la longueur l , son action A est définie $A = pl = mvl$.)

Tout se passe comme si, face aux multiples possibilités de changement qui s'offrent à elle, la structure concrète choisissait la trajectoire correspondant à l'action globale la plus faible. L'introduction d'un choix dans le raisonnement est équivalente à l'acceptation d'un objectif, donc au recours à la finalité.

L'exemple classique est celui de la réfraction d'un rayon lumineux lorsqu'il passe d'un milieu dans un autre ; son parcours rectiligne est alors brisé. Ce changement d'orientation est expliqué en recourant au concept d'indice de réfraction : les angles d'incidence et de réfraction (c'est à dire les angles i et r du rayon lumineux avec la perpendiculaire à la surface de séparation) sont tels que

$$\sin i / \sin r = n_r / n_i$$

ou n_i et n_r sont les indices de réfraction des deux milieux. mais une telle présentation est plus une définition des indices de réfraction qu'une explication des causes du phénomène.

Ces causes peuvent être recherchées dans le fait que la lumière n'a pas la même vitesses dans les deux milieux et que le parcours choisi est celui qui rend minimal le temps total du parcours.

Pour comprendre le comportement du rayon lumineux, le physicien Richard Feynman imagine un homme assis sur une plage et qui voit soudain dans la mer un enfant en difficulté ; il faut vite lui porter secours, sinon il risque de se noyer. Pour être efficace, cet acteur ne doit pas se précipiter en ligne droite vers l'enfant, ce qui est le trajet le plus court, mais faire un détour de façon à allonger son trajet sur le sable, où il peut courir vite, et raccourcir celui dans l'eau , où sa nage est lente. De même, un rayon lumineux allant d'un point A dans l'air à un point B dans l'eau ne suit pas la ligne droite AB, mais fait un détour par le point C, car sa vitesse c_i dans l'air est plus grande que sa vitesse c_r dans l'eau.

Un calcul simple (...), permet de caractériser la position du point C minimisant la durée totale du parcours par la relation

$$\sin i / \sin r = c_i / c_r$$

On constate ainsi que les indices de réfraction, introduits empiriquement pour expliquer le phénomène observé, sont en fait reliés à une réalité physique : la vitesse de la lumière qui varie selon les milieux.

Mais l'important pour notre propos est que le raisonnement tenu est parfaitement finaliste, et la métaphore imaginée par Feynman le montre à l'évidence : l'homme à la plage a un objectif, arriver le plus vite possible. Faut-il admettre que la lumière a une attitude semblable et que les photons, avant de quitter le point A, font les calculs définissant le point C vers lequel ils doivent se diriger, pour ensuite obliquer vers B ? Telle n'est évidemment pas l'intention du physicien ; il constate que tout se passe comme si la nature avait un objectif, mais cette apparence n'est que le résultat de la multiplicité des causes en action.

De même, Newton se gardait d'affirmer que " les masses s'attirent ", il se contentait de constater que tout se passe comme si elles s'attiraient. Avec la théorie de la relativité d'Einstein, cette apparence trouve une explication qui ne fait plus appel à une quelconque " attirance ", mais à une courbure de l'espace.

Chaque fois qu'un processus est expliqué par la recherche d'un optimum, le "péché de finalisme" est effectivement commis, car le raisonnement revient à admettre que la nature fait un choix entre plusieurs attitudes possibles et qu'elle dispose d'un critère faisant référence à l'état futur de la réalité. Pour rester fidèle à la règle du jeu de la science, il est essentiel de ne pas oublier le "tout se passe comme si", qui est un aveu d'ignorance, donc une incitation à poursuivre la recherche.

De Démocrite à Laplace

Malgré la tentation permanente d'une attitude finaliste, la recherche de processus ne faisant appel qu'au déterminisme a obtenu de remarquables succès. Ils ont incité non seulement à récuser la finalité, mais aussi à réduire autant que possible le rôle du hasard. Celui-ci n'est vu que comme une conséquence de notre ignorance, une *terra incognita* provisoire dans notre description des enchaînements de cause à effet. Nous sommes enclins à n'attribuer d'importance qu'au seul acteur véritablement sérieux, le déterminisme qui fait, sans état d'âme, se succéder les événements dans une séquence rigoureuse. Le hasard n'est qu'un trublion dont la disparition est souhaitée. La nécessité fait penser à l'excellent Dr Jekyll, le hasard à l'abominable Mr. Hyde.

Un tel regard sur la réalité a été poussé à son paroxysme par le physicien et mathématicien Simon de Laplace au début du XIX^e siècle.

Dans un texte célèbre, il imagine un personnage (un démon, comme on disait alors) informé de toutes les lois de la nature et connaissant l'état, à un instant donné, de toutes les particules qui constituent l'Univers. Utilisant les formules mathématiques qui traduisent ces lois, ce démon serait en mesure de décrire ce que sera l'Univers à l'instant suivant, et, de proche en proche, tous ses états futurs, ; puis par des calculs semblables, de reconstituer tous ses états passés.

Dans la pensée de Laplace, l'Univers est réellement semblable à l'horloge dont Voltaire cherchait l'horloger ; chaque rouage en est dépendant de tous les autres, que se soit dans l'espace ou dans la durée. Connaître un lieu ou connaître un instant du cosmos, c'est être capable de connaître la totalité de son déploiement dans l'espace et la totalité de son histoire passée et à venir. La réalité d'aujourd'hui contient celle d'aujourd'hui et celle de demain ; l'Univers est comme enfermé dans une trajectoire préétablie dont il ne peut s'échapper ; le passage du temps ne fait que révéler ce qui était jusqu'alors caché sans rien apporter de fondamentalement nouveau.

Cette vision correspond assez bien à celle que nous retirons d'un premier regard sur ce qui nous entoure. À quelques détails près, l'univers semble immuable. "Il n'y a jamais rien de nouveau sous le soleil ? Tout est vanité et poursuite du vent", dit l'Ecclésiaste.

Que l'Univers soit stable, figé dans un état définitif, paraît en un premier temps, plutôt rassurant, tout au moins dans la mesure où nous nous regardons nous-mêmes comme simplement de passage, d'une autre nature que le monde réel. Mais, dès que nous admettons que nous en sommes un élément, il nous faut assumer le même statut et, par conséquent, perdre tout espoir de liberté.

Cette vision d'un monde sur lequel le temps n'a aucune prise, dont l'avenir est contenu dans le présent, est homogène à celle de la " prédestination " développée dans le domaine spirituel par Jean Calvin. Pour ce théologien, tout, y compris le salut éternel de chacun, a été décidé dès le jour de la Création. Pour le physicien qu'est Laplace, ce n'est pas du salut des âmes qu'il est question, mais son raisonnement aboutit au même constat pour le devenir du monde concret, dont chaque individu fait partie. Faut-il alors, au nom de la lucidité scientifique, accepter que la liberté tant célébrée ne soit qu'une chimère de poète ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ABIDJAN

AVRIL 2002

CONCOURS D'ÉLÈVE INGÉNIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES
VOIE B Option Mathématiques

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 HEURES

PROBLÈME N⁰¹

On considère les deux suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} x_0 = 0, & y_0 = 0, \\ x_{n+1} = \sqrt{7 - y_n}, & y_{n+1} = \sqrt{7 + x_n} \quad n \geq 0. \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout entier n :

$$0 \leq x_n \leq \sqrt{7} \quad \text{et} \quad 0 \leq y_n \leq \sqrt{14}.$$

2. Établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} - 2 = \frac{3 - y_n}{x_{n+1} + 2}.$$

3. En déduire que pour tout n de \mathbb{N} :

$$|x_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2} |y_n - 3|.$$

4. Montrer de la même manière que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |y_{n+1} - 3| \leq \frac{1}{3} |x_n - 2|.$$

5. Déduire de tout ce qui précède que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 2, \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 3.$$

PROBLÈME N°2

Pour x réel, on pose $F(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$, lorsque cette intégrale existe.

1. Donner le domaine de définition de F .
2. (a) Montrer que F est continue et dérivable sur son domaine de définition.
(b) Montrer, par récurrence, que F est indéfiniment dérivable.
3. (a) On note \ln le logarithme népérien. Étudier le signe de $F(x) - \ln x$. (On écrira $\ln x$ sous la forme d'une intégrale).
(b) En déduire $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.
(c) Dresser le tableau de variation de F .
4. (a) Vérifier que, $e^t > te^{\frac{t}{2}}$, si $t > 0$.
(b) En déduire l'étude de la branche infinie de F .
(c) Quels sont les points d'inflexion de F .
(d) Tracer la courbe représentative de F .

PROBLÈME N°3

1. Soient f_1 et f_2 deux fonctions continues sur $[0, 1]$. Montrer que :

$$\sup_{x \in [0,1]} (f_1(x) + f_2(x)) \leq \sup_{x \in [0,1]} f_1(x) + \sup_{x \in [0,1]} f_2(x).$$

2. Soient f et g deux fonctions continues sur $[0, 1]$ et soit u un réel. Montrer que $\sup_{x \in [0,1]} (f(x) + ug(x))$ est fini.

Dans la suite de ce problème, on pose $h(u) = \sup_{x \in [0,1]} (f(x) + ug(x))$, où f et g sont deux fonctions continues sur $[0, 1]$, et on cherche à étudier h sur $[0, +\infty[$.

3. On suppose en outre que g est positive ou nulle sur $[0, 1]$.

(a) Montrer que pour tout $u \in [0, +\infty[$:

$$\inf_{x \in [0,1]} f(x) + u \sup_{x \in [0,1]} g(x) \leq h(u).$$

Indication : On pourra remarquer que pour tout x de $[0, 1]$,

$$\inf_{y \in [0,1]} f(y) + ug(x) \leq f(x) + ug(x).$$

(b) Montrer que pour tout $u \in [0, +\infty[$:

$$h(u) \leq \sup_{x \in [0,1]} f(x) + u \sup_{x \in [0,1]} g(x).$$

(c) Dédurre de (a) et (b) que $\frac{h(u)}{u}$ a une limite en $+\infty$ que l'on calculera.

(d) A quelle condition h est-elle bornée sur $[0, +\infty[$. Que vaut alors h ?

4. On suppose toujours que g est positive ou nulle sur $[0, 1]$.

(a) Montrer que h est croissante.

(b) Soit $u \leq u'$. Montrer que :

$$h(u') \leq h(u) + (u' - u) \sup_{x \in [0,1]} g(x).$$

Indication : On pourra utiliser la question 1, avec deux fonctions f_1 et f_2 bien choisies.

(c) Conclure que h est continue sur $[0, +\infty[$.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ABIDJAN

AVRIL 2002

CONCOURS D'ÉLÈVE INGÉNIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES
VOIE B Option Mathématiques

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 3 HEURES

EXERCICE N⁰1

Soit la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Calculer les valeurs propres de A .
 - Déterminer les espaces propres de A .
 - En déduire que A est diagonalisable. A est-elle inversible?
- Exhiber une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.
 - Calculer P^{-1} .
- Soit n un entier strictement positif. Montrer que A et A^n sont diagonalisables dans la même base.
 - Calculer A^n , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
 - Calculer A^{-1} .

EXERCICE N⁰2

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n et soit f un endomorphisme de E . On suppose qu'il existe un entier $p \geq 2$ tel que $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$.

1. Soit x un vecteur de E . Montrer que $\{x, f(x), \dots, f^{p-1}(x)\}$ est une famille libre de E si et seulement si $f^{p-1}(x) \neq 0$.
2. En déduire que $p \leq n$.
3. Établir que $\{0\} \subset \text{Ker } f \subset \text{Ker } f^{p-1} \subset \text{Ker } f^p = E$.
4. Démontrer que toutes les inclusions précédentes sont strictes.

PROBLÈME

Partie I

Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. On définit la trace d'une matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$\text{tr} A = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

1. Montrer que la trace est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans \mathbb{R} .
2. Établir que $\text{tr}(A) = \text{tr}({}^t A)$, pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, où ${}^t A$ désigne la transposée de A .
3. (a) Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.
 (b) En déduire que deux matrices semblables ont la même trace.
4. Montrer qu'il n'existe pas de matrice A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A {}^t A - {}^t A A = I$, où I désigne la matrice identité. (On pourra calculer $\text{tr}(A {}^t A - {}^t A A)$ pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

Partie II

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*$ l'ensemble des formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (applications linéaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans \mathbb{R}).

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit l'application :

$$\varphi_A : X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto \text{tr}(AX).$$

1. Montrer que φ_A appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*$.

2. On définit maintenant l'application :

$$f : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto \varphi_A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*.$$

(a) Montrer que f est une application linéaire.

(b) Montrer que f est injective. (On pourra penser à utiliser les matrices E_{lm} dont tous les éléments sont nuls hormis celui situé à l'intersection de la l -ième ligne et de la m -ième colonne qui est égal à 1).

(c) Quelles sont les dimensions de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*$?

(d) En déduire que l'application f est bijective.

3. (a) Soit E un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\dim E = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) - 1$). Prouver qu'il existe φ_0 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*$ telle que $E = \text{Ker } \varphi_0$.

(b) En déduire qu'il existe une matrice non nulle A_0 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \text{tr}(A_0 M) = 0\}.$$