ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2001

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

CORRIGE DE LA DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

EXERCICE n° 1

❶ On obtient $\det(A-\lambda I)=(1-\lambda)^3$. $\lambda=1$ est donc une valeur propre triple. Le sous espace vectoriel propre associé est une droite engendrée par le vecteur $e_1=(1,1,1)$.

❷ A est semblable à la matrice M telle que : $Ae_1=e_1$, $Ae_2=e_1+e_2$ et $Ae_3=e_3+e_2$. On trouve $e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ et $e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, d'où $M=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, $\Delta=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ et $J=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$. On a $J^3=0$. Enfin $P=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&2&1\end{pmatrix}$.

❸ $A^n=PM^nP^{-1}$ et $M^n=(\Delta+J)^n=I+nJ+\dfrac{n(n-1)}{2}J^2$. à savoir $M^n=\begin{pmatrix}1&n&n(n-1)/2\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}$. En particulier $P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\1&-2&1\end{pmatrix}$. L'expression de A^n s'en déduit par la relation précédente.

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{(n-1)(n-2)}{2} & n(2-n) & \frac{n(n-1)}{2} \\ \frac{n(n-1)}{2} & 1-n^2 & \frac{n(n+1)}{2} \\ \frac{n(n+1}{2} & -n(2+n) & \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{pmatrix}.$$

❹ D'autre part, on obtient : $u_n = A^n\, u_0$ et $u_0 = A\ u_0$, d'où $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. La suite est donc stationnaire.

EXERCICE n° 2

❶ On vérifie que $A'\ A = I$ (matrice unité).

❷ La matrice A est donc une matrice orthogonale et ses valeurs propres sont de module égal à 1. Comme le polynôme caractéristique est de degré 3 et le déterminant positif, les valeurs propres sont : 1, $e^{i\alpha}$ et $e^{-i\alpha}$.
Par ailleurs la trace étant invariante par changement de base, on a : $TrA = \frac{-1}{3} = 1 + e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}$, d'où $\alpha = Arc\cos(-\frac{2}{3})$

EXERCICE n° 3

❶ Le noyau de f est une droite vectorielle engendrée par le vecteur (2,1,3) et l'image correspond donc au plan.

❷ Il existe x tel que : $p(u) = x(2,1,3) \in Kerf$ et la distance entre u et $Kerf$ est minimale. On a : $d^2\ (u, Kerf) = (1-2x)^2 + (1-x)^2 + (1-3x)^2$.
Cette expression est convexe et le minimum est atteint pour $x = \frac{3}{7}$, d'où $p(u) = \frac{3}{7}(1,2,3)$

❸ La matrice R de la rotation r est, dans la base canonique : $R=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. On obtient $r(u)=(-1,1,1)$

❹ Soit P la matrice associée à p, on a (le raisonnement est identique à celui de la deuxième question) : $P=\dfrac{1}{14}\begin{pmatrix}4 & 2 & 6\\ 2 & 1 & 3\\ 6 & 3 & 9\end{pmatrix}$

On obtient : $P\circ R(u)=\dfrac{1}{14}\begin{pmatrix}2 & -4 & 6\\ 1 & -2 & 3\\ 4 & -6 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}=\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 3\end{pmatrix}$ et

$R\circ P(u)=\dfrac{1}{14}\begin{pmatrix}-2 & -1 & -3\\ 4 & 2 & 6\\ 6 & 3 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}=\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix}-3\\ 4\\ 9\end{pmatrix}$

EXERCICE n° 4

❶ On vérifie aisément que f est linéaire et que $f(X^{2n})=-2nX^{2n-1}-2aX^{2n}\in E$, il en est de même pour tout $p,(p\leq n)$. f est donc un endomorphisme.

❷ Les valeurs propres sont de la forme $\lambda=-2a\pm 2k$, où $k=0,1,...,n$.
La résolution de l'équation $f(P)=\lambda P$ permet de déterminer les vecteurs propres associés aux valeurs propres précédentes, à savoir : $P(X)=(X-1)^{n+k}(X+1)^{n-k}$. où k varie de $-n$ à $+n$.

❸ f est diagonalisable car toutes les valeurs propres sont réelles et distinctes. De plus f est inversible car ses valeurs propres sont non nulles.

❹ Les vecteurs propres forment donc une base de E et tout polynôme de E s'écrit comme une combinaison linéaire de ces vecteurs.

EXERCICE n° 5

❶ Dans ce cas, la matice M est symétrique, donc elle est diagonalisable. D'autre part, $rg(M) = rg(AA^{'}) = rg(A) = p$, la matice M admet donc $n-p$ valeurs propres nulles et M est semblable à la matrice $\Delta = \begin{pmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec une matrice de passage P orthogonale de la forme $P = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$.

La matice M s'écrit : $M = (P_1\Delta_1^{1/2})(\Delta_1^{1/2}P_1)$, où $\Delta_1^{1/2}$ est la matrice diagonale dont les valeurs de la diagonale correspondent aux racines carrées des valeurs de la diagonale de Δ. Si $B = P_1\Delta_1^{1/2}$, on a : $AA' = BB'$, d'où $B^{-1}A = B'A'^{-1}$ et $B^{-1}A = Q$ est une matrice orthogonale . On en déduit $A = QP_1\Delta_1^{1/2}$.

❷ On vérifie que $AA^{'} + \sigma^2 I_n \geq \sigma^2 I_n$, donc la matice M est symétrique définie positive et elle est diagonalisable dans le groupe orthogonale (notons P_1 la matrice de passage). Elle est semblable à une matrice Δ diagonale et définie positive. De même, la matrice A s'écrit alors: $A = QP_1(\Delta + \sigma^2 I)^{1/2}$.

❸ On a : $M \geq D$. D étant définie positive, il en est de même pour M et cette matrice est inversible.
On obtient $M^{-1} = D^{-1}(I + D^{-1}AA^{'})^{-1}$ à partir de la résolution de l'équation : $y = Mx$. On vérifie que $MM^{-1} = I$ (On vérifie que $I + D^{-1}AA'$ est inversible).

EXERCICE 6

❶ On vérifie que $AB - BA$ est une matrice antisymétrique.
Notons $C = AB - BA$. C est diagonalisable dans l'ensemble des nombres complexes. Soit λ une valeur propre complexe et u un vecteur propre associé. On a :

$Cu = \lambda u$, d'où $\bar{u}^{'}Cu = \lambda\,\bar{u}^{'}u = \lambda\,\|u\|^2$ et $\bar{u}^{'}C^{'}u = -\lambda\,\|u\|^2$ (i)

Par ailleurs, $(Cu)^{'} = (\lambda\,u)^{'} = u^{'}C^{'} = \lambda u^{'}$ et $\bar{u}^{'}C^{'} = \bar{\lambda}\,\bar{u}^{'}$. Il vient,en multipliant par u à droite : $\bar{u}^{'}C^{'}u = \bar{\lambda}\,\|u\|^2$ (ii).

D'après les résultats précédents (i) et (ii), on trouve $\bar{\lambda} = -\lambda$, les valeurs propres sont donc des imaginaires purs.

❷ Il existe une base orthonormée pour la forme hermitienne associée à A et orthogonale pour la forme hermitienne associée à B. Soit P la matrice de passage associée à cette base, alors
$A=\overline{P}'P$ et $B=\overline{P}'DP$, où D est une matrice diagonale à coefficients strictement positifs $\left(d_{ij}\right)$. Notons $d=Inf\,(d_{ii})$. On a :
$Tr\,AB=Tr\,(\overline{P}'P\overline{P}'DP)=Tr\,(P\overline{P}'P\overline{P}'D)\geq d\,Tr(A^2)$
Si $A=(a_{ij})$, comme A est symétrique, on obtient : $Tr(A^2)=\sum_{i,k}a_{ik}^2$. $Tr(A^2)>0$, car sinon on aurait $A=0$, donc $Tr(AB)>0$.

❸ Supposons que $I+M$ ne soit pas inversible, il existe alors un vecteur u non nul tel que : $(I+M)u=0$, d'où $M\,u=-u$. Par transposition, $u'\,M'=-u'$ puis $u'\,M'\,u=-\|u\|^2$. D'autre part, comme M est antisymétrique $M'\,u=u$ et $u'\,M'\,u=\|u\|^2$. On obtient alors $\|u\|^2=-\|u\|^2$ et $u=0$. Ce qui conduit à une contradiction.

La matrice $A=(I-M)(I+M)^{-1}$ existe d'après la question précédente.
A est orthogonale si et seulement si $A'=A^{-1}$. Ce qui est équivalent à : $(I-M)^{-1}M=M\,(I-M)^{-1}$. Cette relation est obtenue à partir de la relation $(I-M)M=M\,(I-M)$ en la multipliant à gauche et à droite par $(I-M)^{-1}$. On montre de même que $I-M$ est inversible.

Concours CESD 2001

Corrigé de l'épreuve de Calcul Numérique

1. Les trois vecteurs $(1,1,1),(2,4,8)$ et $(3,9,27)$ sont dans M_1, donc dans V_1. Ils sont linéairement indépendants, car
$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 27 \end{pmatrix} = 12 \neq 0.$$
Alors $\dim V_1 \geq 3$, et comme la dimension de V_1 est bornée par celle de $\mathbb{R}^3$ elle vaut 3.
Comme $(n+1, 2n+1, 3n+1) = n(1,2,3) + (1,1,1)$ on voit que V_2 est engendré par les deux vecteurs linéairement indépendants $(1,2,3)$ et $(1,1,1)$. Par conséquent $\dim V_2 = 2$.

2. Soit a le remboursement annuel, c le montant du crédit et p le taux d'intérêt. Après le premier remboursement le montant restant du crédit est
$$(1+p)c - a.$$
Après le deuxième remboursement le montant restant du crédit est
$$(1+p)((1+p)c-a) - a.$$
En général, après le n-ième remboursement, $n = 0, \ldots, 5$ le montant restant est
$$(1+p)^n c - ((1+p)^{n-1} + (1+p)^{n-2} + \cdots + 1)a = (1+p)^n c - \frac{(1+p)^n - 1}{p} a.$$
Pour $n = 5$ ce montant doit être nul, car le prêt dure 5 ans. Alors
$$a = \frac{p(1+p)^5}{(1+p)^5 - 1} c = \frac{0,04(1,04)^5}{(1,04)^5 - 1} \times 100\,000\text{FF} = 22\,462,71\text{FF}.$$

3. (a) Montrons d'abord que $a_{n+1}^2 \geq c$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En effet,

$$a_n^4 + c^2 - 2a_n^2 c = (a_n^2 - c)^2 \geq 0$$
$$\Rightarrow a_n^4 + c^2 + 2a_n^2 c \geq 4a_n^2 c$$
$$\Rightarrow a_{n+1}^2 = \frac{a_n^2}{4} + \frac{c^2}{4a_n^2} + \frac{c}{2} \geq c.$$

Maintenant montrons que $a_{n+1} \leq a_n$ pour tout $n \geq 1$. On a

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{c}{2a_n} \leq \frac{a_n}{2} + \frac{a_n^2}{2a_n} = a_n.$$

Donc la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est bornée et décroissante. Comme $\mathbb{R}$ est complet elle doit alors converger vers une limite a dans $\mathbb{R}$.

(b) De $a = \lim a_n = \lim a_{n+1}$ et de la définition récurrente on déduit $a = \frac{a}{2} + \frac{c}{2a}$, et de là $a^2 = c$. Comme $a \geq 0$ on a $a = \sqrt{c}$.

4. (a) L'ensemble D est le triangle fermé entre les points $(0,0), (0,\pi)$ et $(\pi, 0)$.

(b) La fonction f s'anulle sur le bord ∂D du triangle D, et elle est strictement positive sur l'intérieur D°. Donc tous les points sur ∂D sont des minima (globaux) et il n'y en a pas d'autres.

(c) La fonction f est de la classe C^∞ car ses composantes le sont. Tous les extrema $(x,y) \in D^\circ$ vérifient alors

$$\partial_x f(x,y) = \partial_y f(x,y) = 0.$$

Ceci donne

$$\cos x \sin y \sin(x+y) + \sin x \sin y \cos(x+y) = 0,$$

$$\sin x \cos y \sin(x+y) + \sin x \sin y \cos(x+y) = 0.$$

Sur l'intérieur D° nous avons $\sin x \neq 0 \neq \sin y$, d'où

$$\cos x \sin(x+y) = -\sin x \cos(x+y), \; \cos y \sin(x+y) = -\sin y \cos(x+y).$$

De la première équation nous tirons que $\cos(x+y) \neq 0 \neq \cos x$, et de la deuxième que $\cos y \neq 0$. Donc par division

$$\frac{\cos x}{\cos y} = \frac{\sin x}{\sin y}.$$

D'où $\tan x = \tan y$, et enfin $x = y$. La première équation donne alors

$$\cos x \sin(2x) + \sin x \cos(2x) = 0,$$

donc $\sin(3x) = 0$. Alors $x = \frac{\pi}{3}$. Par conséquent seul le point $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ peut annuler $\partial_x f$ et $\partial_y f$ — et il le fait (vérification facile).
Maintenant $(a, b) = (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ est l'unique maximum de f. En effet la fonction f continue admet un maximum sur le compact D et $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ est l'unique candidat.
On a $f(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) = 3\sqrt{3}/8$.

(d) La série de Taylor jusqu'à l'ordre 2 est

$$\begin{aligned} T_2 &= f(a,b) + (\partial_x f(a,b), \partial_y f(a,b)) \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} \\ &\quad +(x-a, y-b) \begin{pmatrix} \partial_x^2 f(a,b) & \partial_x\partial_y f(a,b) \\ \partial_y\partial_x f(a,b) & \partial_y^2 f(a,b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} \\ &= 3\frac{\sqrt{3}}{8} + (x - \frac{\pi}{3}, y - \frac{\pi}{3}) \begin{pmatrix} \partial_x^2 f(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) & \partial_x\partial_y f(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) \\ \partial_y\partial_x f(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) & \partial_y^2 f(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - \frac{\pi}{3} \\ y - \frac{\pi}{3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \partial_x^2 f &= 2\cos x \sin y \cos(x+y) - 2\sin x \sin y \sin(x+y), \\ \partial_y^2 f &= 2\sin x \cos y \cos(x+y) - 2\sin x \sin y \sin(x+y), \\ \partial_x\partial_y f &= \cos x \cos y \sin(x+y) + \cos x \sin y \cos(x+y) \\ &\quad + \sin x \cos y \cos(x+y) - \sin x \sin y \sin(x+y). \end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned} T_2 &= 3\sqrt{3}/8 - (x - \frac{\pi}{3}, y - \frac{\pi}{3}) \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - \frac{\pi}{3} \\ y - \frac{\pi}{3} \end{pmatrix} \\ &= 3\sqrt{3}/8 - (x - \frac{\pi}{3}, y - \frac{\pi}{3}) \begin{pmatrix} \sqrt{3}(x - \frac{\pi}{3}) + \sqrt{3}/2(y - \frac{\pi}{3}) \\ \sqrt{3}/2(x - \frac{\pi}{3}) + \sqrt{3}(y - \frac{\pi}{3}) \end{pmatrix} \\ &= 3\sqrt{3}/8 - \sqrt{3}((x - \frac{\pi}{3})^2 + (x - \frac{\pi}{3})(y - \frac{\pi}{3}) + (y - \frac{\pi}{3})^2). \end{aligned}$$

5. Avec la substitution $t = \tan x$ on a $\mathrm{d}t = \mathrm{d}x/\cos^2 x$. Alors

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x \cos x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\tan x \cos^2 x} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| = \ln|\tan x|.$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\mathrm{d}x}{\sin x \cos x} &= \ln\tan(\pi/3) - \ln\tan(\pi/6) \\ &= \ln\sqrt{3} - \ln\frac{1}{\sqrt{3}} = \ln 3. \end{aligned}$$

6. (a)

$$\begin{aligned} Ona \sum_{k\geq 2}^{n} \frac{1}{k(k^2-1)} &= \sum_{k\geq 2}^{n} (\frac{1}{2(k-1)} + \frac{1}{2(k+1)} - \frac{1}{k}) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2n} \end{aligned}$$

ce qui converge vers $\frac{1}{4}$ quand $n \longrightarrow \infty$.

(b) D'après de l'Hôpital on a

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to 1} e^{\frac{\ln x}{x-1}} = \lim_{x\to 1} e^{\frac{\frac{1}{x}}{1}} = e.$$

7. On a $V = \pi r^2 h$ et $S = 2\pi r(r+h)$. Comme V est constant on peut remplacer $h = \frac{V}{\pi r^2}$ dans l'expression pour S :

$$\begin{aligned} S(r) &= 2\pi r(r + \frac{V}{\pi r^2}) = 2\pi r^2 + 2\frac{V}{r}, r > 0, \\ S'(r) &= 4\pi r - 2\frac{V}{r}. \end{aligned}$$

Comme $\lim_{r\to 0^+} S(r) = \lim_{r\to\infty} S(r) = \infty$, on sait que S possède un minimum. De $S'(r) = 0$ on tire $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$, et de là $h = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$.

SESSION D' AVRIL 2001

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE ABIDJAN

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

PROBLEME I

1. (a) Le nombre $\sup\limits_{x\in X} h_m(x)$ est un majorant des nombres $mx - f(x)$ lorsque $x \in X$. Donc :

$$\forall m \in X^\circ,\ \forall x \in X,\ f^\circ(m) \geq mx - f(x)$$

Ainsi on a :

$$\forall m \in X^\circ,\ \forall x \in X,\ f^\circ(m) + f(x) \geq mx$$

Fixons $x \in X$ alors on a :

$$\forall m \in X^\circ,\ f(x) \geq mx - f^\circ(m)$$

$f(x)$ est un majorant des valeurs $mx - f^\circ(m)$ lorsque $m \in X^\circ$. Donc

$$f(x) \geq \sup_{m\in X^\circ} mx - f^\circ(m)$$

(b) Soit $m_1 \in X^\circ$ et $m_2 \in X^\circ$ alors

$$\exists M_1 \in \mathbb{R},\ \forall x \in X,\ m_1 x - f(x) \leq M_1$$

$$\exists M_2 \in \mathbb{R},\ \forall x \in X,\ m_2 x - f(x) \leq M_2$$

Soit $\lambda \in [0,1]$ en posant $M = \lambda M_1 + (1-\lambda)M_2$ on obtient

$$\forall x \in X,\ (\lambda m_1 + (1-\lambda)m_2)x - f(x) \leq M$$

Donc $\lambda m_1 + (1-\lambda)m_2 \in X^\circ$

(c) Soit $m \in \mathbb{R}$. X est un compact, la fonction h_m est continue sur X donc h_m est bornée et atteint ses bornes. En particulier $X^\circ = \mathbb{R}$ et

$$\exists x_0 \in X,\ h_m(x_0) = \sup_X (mx - f(x))$$

$$\exists x_0 \in X, f^\circ(m) = mx_0 - f(x_0)$$

2. (a) $h_m(x) = mx - e^x$ et $h'_m(x) = m - e^x$.

   - Si $m < 0$, la fonction h_m est décroissante sur $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} h_m(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} h_m(x) = -\infty$. Donc $m \notin X^\circ$.
   - Si $m = 0$, la fonction h_m est décroissante sur $\mathbb{R}$, $lim_{x \to -\infty} h_m(x) = 0$, $\lim x \to \infty h_m(x) = -\infty$ donc $m \in X^\circ$ et $f^\circ(0) = 0$.
   - Si $m > 0$, la fonction h_m est croissante sur $]-\infty, \ln m]$ et décroissante sur $[\ln m, \infty[$ $\lim\limits_{x \to \pm\infty} h_m(x) = -\infty$ donc $m \in X^\circ$ et $f^\circ(m) = m \ln m - m$.

   En résumé $X^\circ = \mathbb{R}^+$.

   Notons $H_m(x) = mx - f^\circ(x)$. On a $H_m(0) = 0$ et si $x > 0$, $H_m(x) = (m+1)x - x\ln x$. Sur $\mathbb{R}^{+\star}$, $H'_m(x) = m - \ln x$. Donc H_m est croissante sur $]0, e^m]$ décroissante sur $[e^m, \infty[$. Elle atteint son maximun en $x = e^m$ et $H_m(e^m) = e^m$. Ainsi

$$\begin{array}{ll} X^\circ = \mathbb{R}^+ & f^\circ(0) = 0 \text{ si } x > 0\ f^\circ(x) = x(lnx - 1) \\ X^{\circ\circ} = \mathbb{R} & f^{\circ\circ}(x) = e^x \end{array}$$

(b) $h_m(x) = mx - \frac{x^3}{3}$. $\lim\limits_{x \to -\infty} h_m(x) = \infty$ donc $X^\circ = \emptyset$

(c) $h_m(x) = (m - \alpha)x + \beta$

   - Si $m \neq \alpha$, h_m est non bornée et $m \notin X^\circ$
   - Si $m = \alpha$, h_m est constante et vaut β.

   Finalement $X^\circ = \{\alpha\}$ et $f^\circ(\alpha) = \beta$. $H_m(x) = mx - f^\circ(x)$ est une fonction bornée et $\sup\limits_{x=\alpha}(mx - f^\circ(x)) = m\alpha - \beta$ Donc $X^{\circ\circ} = \mathbb{R}$ et $f^{\circ\circ}(x) = \alpha x - \beta$.

(d) $h_m(x) = mx - f(x)$. L'image de h_m est $h_m(\{-1, 0, 1, 2\}) = \{-m - 1, 0, m - 2, 2m - 1\}$. Cet ensemble est toujours majoré, on trouve $X^\circ = \mathbb{R}$

$$f^\circ(m) = \left\{ \begin{array}{lll} -m - 1 & si & m \leq -1 \\ 0 & si & -1 \leq m \leq \frac{1}{2} \\ 2m - 1 & si & m \geq \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

En calculant $H_m(x) = mx - f^\circ(x)$ on trouve

$$H_m(x) = \begin{cases} (m+1)x+1 & si \quad x \leq -1 \\ mx & si \quad -1 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ (m-2)x+1 & si \quad \frac{1}{2} \leq x \end{cases}$$

Finalement H_m est majoré si est seulement si $m \in [-1,2]$ $X^{\circ\circ} = [-1,2]$ et $f^{\circ\circ}(x) = -x$ si $x \in [-1,0]$ et $f^{\circ\circ}(x) = \frac{x}{2}$ si $x \in [0,2]$

3. (a) Si $(X,f) \leq (Y,g)$ et $(Y,g) \leq (Z,h)$ alors $Z \subset X$ et $\forall x \in Z,\ f(x) \leq h(x)$ donc $(X,f) \leq (Z,h)$.
   Si $(X,f) \leq (Y,g)$ et $(Y,g) \leq (X,f)$ alors $X = Y$ et $\forall x \in X,\ f(x) = g(x)$ donc $(X,f) = (Y,g)$.

   (b) On suppose que $Y \subset X$, $\forall x \in Y,\ f(x) \leq g(x)$ et que X° est non vide. Soit $m \in X^\circ$ il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in X,\ mx - f(x) \leq M$. Donc $\forall x \in Y,\ mx - g(x) \leq M$. Donc $m \in Y^\circ$. On a montrer que $X^\circ \subset Y^\circ$. Pour $m \in X^\circ, \forall x \in Y,\ mx - g(x) \leq mx - f(x)$. Pour $m \in X^\circ$

$$\sup_{x \in Y} mx - g(x) \leq \sup_{x \in Y} mx - f(x) \leq \sup_{x \in X} mx - f(x)$$

   Donc $g^\circ(m) \leq f^\circ(m)$.

   (c) On a l'équivalence de propositions suivantes :

$$(\mathbb{R}, \phi_{m,p}) \leq (X,f)$$

$$X \subset \mathbb{R},\ \forall x \in X,\ \phi_{m,p}(x) \leq f(x)$$

$$\forall x \in X,\ \phi_{m,p}(x) \leq f(x)$$

$$\forall x \in X,\ mx - f(x) \leq p$$

$$m \in X^\circ \text{ et } f^\circ(m) \leq p$$

   On a montrer que $(\mathbb{R}, \phi_{m,p}) \leq (X,f)$ si et seulement si $m \in X^\circ$ et $p \geq f^\circ(m)$.
   Soit $m \in X^\circ$ si $f^\circ(m) \leq p$ alors $\varphi(x) \geq \phi_{m,p}(x)$ En utilisant le résultat au dessus on obtient que si
   $m \in X^\circ$ et $(\mathbb{R}, \phi_{m,p}) \leq (X,f)$ alors $(\mathbb{R}, \phi_{m,p}) \leq (\mathbb{R}, \varphi)$. La droite d'équation $y = \varphi(x)$ est la droite au dessous de f la plus proche de f et de pente m.

4. (a) D'après la question 1)(a) soit $x \in X$ $\forall m \in X^\circ,\ xm - f^\circ(m) \leq f(x)$ Cela démontre que la fonction $H_x(m) = xm - f^\circ(m)$ pour $x \in X$ est bornée par $f(x)$ sur l'ensemble X°. Donc $X \subset X^{\circ\circ}$ et $f^{\circ\circ}(x) \leq f(x)$. Soit encore $(X^{\circ\circ}, f^{\circ\circ}) \leq (X,f)$.

(b) D'après la question 3)(b) et la question précédente

$$(X^{\circ\circ\circ}, f^{\circ\circ\circ}) \geq (X^{\circ}, f^{\circ}).$$

Par ailleurs la question précédente appliquée à la fonction f° prouve que :

$$(X^{\circ\circ\circ}, f^{\circ\circ\circ}) \leq (X^{\circ}, f^{\circ}).$$

En utilisant la question 3)(a) on conclu que

$$(X^{\circ\circ\circ}, f^{\circ\circ\circ}) = (X^{\circ}, f^{\circ}).$$

(c) D'après la question 1)(c) $X^{\circ} = \mathbb{R}$. Une droite passant par les points $A = (-a, f(-a))$ et $A' = (a', f(a')$ $(a' \neq -a)$ a pour pente $\frac{f(a')-f(-a)}{a'+a}$ Cette droite est tangente en A' si la pente de cette droite est la derivée de f au point a' . A' est solution du problème si et seulement si

$$\frac{a'^3 + a^3}{a' + a} = 3a'^2,$$

soit si a' est solution de $2(a' - \frac{a}{2})(a' - \frac{a}{2})(a' + a) = 0$ et $a' \neq a$, donc $a' = \frac{a}{2}$. Le point A' a pour coordonnées $(\frac{a}{2}, \frac{a^3}{24})$

PROBLEME II

1. (a) $y_n(-x) = \cos(n \arccos(-x)) = \cos(n(\pi - \arccos x)) = (-1)^n \cos(n \arccos x)$ y_n est de la même parité que n. $z_n(-x) = \sin(n \arccos(-x)) = (-1)^{n+1} \sin(n \arccos x)$, z_n est de même parité que $n-1$.
$y_n(0) = \cos(n\frac{\pi}{2})$.
Si n est impair, $y_n(0) = 0$. Si n est pair, $y_n(0) = (-1)^{\frac{n}{2}}$. $z_n(0) = \sin(n\frac{\pi}{2})$.
Si n est pair $z_n(0) = 0$, si n est impair $z_n(0) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$.
$y_n(1) = 1$ et $z_n(1) = 0$

(b) Les fonctions cos et sin sont dérivables sur $\mathbb{R}$, la fonction arccos est dérivable sur $]-1, 1[$, donc les fonctions y_n et z_n sont dérivables sur $]-1, 1[$.

$$y_n'(x) = n\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sin(n \arccos x) = \frac{n}{\sqrt{1-x^2}} z_n(x)$$

$$z_n'(x) = -n\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cos(n \arccos x) = -\frac{n}{\sqrt{1-x^2}} y_n(x)$$

(c) Rappelons les équivalences :

$$(cosx - 1) \sim_0 \frac{-x^2}{2}$$

$$sinx \sim_0 x$$

Elles impliquent :

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\cos(n\theta) - 1}{\cos\theta - 1} = \lim_{\theta \to 0} \frac{n^2\theta^2}{\theta^2} = n^2$$

Et comme la limite de la quantite $\frac{n\theta}{\theta^2}$ lorsque $\theta \to 0$ n'existe pas, la limite lorsque $\theta \to 0$ de $\frac{\sin(n\theta)}{\cos\theta - 1}$ n'existe pas. En posant $\theta = \arccos(x)$ on obtient

$$\lim_{x \to 1} \frac{\cos(n \arccos x) - 1}{x - 1} = \lim_{\theta \to 0} \frac{\cos(n\theta) - 1}{\cos\theta - 1} = n^2$$

La fonction y_n est dérivable en 1 de nombre dérivée n^2. La fonction y_n étant de même parité que n, y_n est dérivable en -1 de dérivée $(-1)^{n-1}n^2$. En posant $\theta = \arccos(x)$ on obtient que la fonction z_n n'est pas dérivable en 1. La fonction z_n étant de même parité que $n-1$, z_n n'est pas dérivable en -1.

(d) L'équation $y_n(x) = 0$ est équivalente à $n \arccos x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ où encore

$$\arccos x \in \{\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n},\ k \in \mathbb{N}\}$$

$\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}$ appartient a $[0, \frac{\pi}{2}]$ si et seulement si $k \in \{0, \cdots, E(\frac{n-1}{2})\}$ Les solutions appartenant à $[0, 1]$ sont :

$$\{y_k = cos(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}),\ k \in \{0, \cdots, E(\frac{n-1}{2})\}\}.$$

$z_n(x) = 0$ est équivalente à $n \arccos x = k\pi$ où encore à

$$\arccos x \in \{k\frac{\pi}{n},\ k \in \mathbb{N}\}$$

$k\frac{\pi}{n}$ appartient a $[0, \frac{\pi}{2}]$ si et seulement si $k \in \{0, \cdots, E(\frac{n}{2})\}$ Les solutions appartenant à $[0, 1]$ sont

$$\{z_k = cos(k\frac{\pi}{n}),\ k \in \{0, \cdots, E(\frac{n}{2})\}\}.$$

L'inéquation $y_n(x) \geq 0$ est équivalente à

$$n \arccos x \in (\cup_{k\in\mathbb{N}}[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi]) \cap [0, \pi]$$

- si n est pair, $y_n(x) \geq 0$ est équivalent à

$$\arccos x \in [0, \frac{\pi}{2n}] \cup_{k=1}^{k=E(\frac{n-1}{2})} [-\frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n}, \frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n}] \cup [-\frac{\pi}{2n} + \pi, \pi]$$

- si n est impair, $y_n(x) \geq 0$ est équivalente à

$$\arccos x \in [0, \frac{\pi}{2n}] \cup_{k=1}^{k=E(\frac{n-1}{2})} [-\frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n}, \frac{\pi}{2n} + \frac{2\pi}{n}]$$

La fonction arccos est décroissante. A_n est l' ensemble :

- pour n pair

$$[\cos(\pi), \cos(-\frac{\pi}{2n} + \pi)] \cup_{k=1}^{k=E(\frac{n-1}{2})} [\cos(\frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n}\pi), \cos(-\frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n}\pi)] \cup [\cos(\frac{\pi}{2n}), \cos(0)]$$

- pour n impair

$$\cup_{k=1}^{k=E(\frac{n-1}{2})} [\cos(\frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n}\pi), \cos(-\frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n}\pi)] \cup [\cos(\frac{\pi}{2n}), \cos(0)]$$

L'inéquation $z_n(x) \geq 0$ est équivalent à $n \arccos x \in \cup_{k\in\mathbb{N}}[0+2k\pi, \pi + 2k\pi] \cap [0, \pi]$

$$\arccos x \in \cup_{k=1}^{k=E(\frac{n-1}{2})}[\frac{2k\pi}{n}, \frac{(2k+1)\pi}{n}]$$

La fonction arccos est décroissante. B_n est l' ensemble

$$\cup_{k=1}^{k=E(\frac{n-1}{2})}[\cos(\frac{\pi}{n}+\frac{2k}{\pi}), \cos(\frac{2k}{\pi})]$$

Le signe de $y'_n(x)$ est le même que de celui de $z_n(x)$. y_n est croissante sur A_n, décroissante ailleurs. Le signe de $z'_n(x)$ est l'opposé de celui de $y_n(x)$. z_n est décroissante sur B_n, croissante ailleurs.

2. (a) $y_0(x) = 1$ $z_0(x) = 0$ $y_1(x) = x$ et $z_1(x) = \sqrt{1-x^2}$

   (b)
   $$\begin{aligned} y_{n+2}(x) + y_n(x) &= 2\cos((n+2)\arccos x) + \cos(n \arccos x) \\ &= \cos((n+1)\arccos x)\cos(\arccos x). \end{aligned}$$

   $y_{n+2}(x) + y_n(x) = 2xy_{n+1}(x)$.
   De même on trouve $z_{n+2}(x) + z_n(x) = 2xz_{n+1}(x)$

   (c) Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}_n$: y_n est une fonction polynôme de degré n et $z_n(x)$ peut s'exprimer sous la forme :

   $$z_n(x) = \sqrt{1-x^2}g_n(x)$$

   où g_n est une fonction polynôme de degré $n-1$. Les propositions $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ sont vraies. Si on suppose $n \geq 1$ et les propositons $\mathcal{P}_k$ vraie pour tout $k \leq n$ alors $y_{n+1} = 2xy_n - y_{n-1}$, ainsi y_{n+1} est un polynôme de degré $n+1$. $z_{n+1} = 2xz_n - z_{n-1} = (2xg_n(x) - g_{n-1}(x))\sqrt{1-x^2}$ donc $g_{n+1} = 2xg_n(x) - g_{n-1}(x)$ est un polynome de degré n.

   (d) Les formules de Moivre sont

   $$cos(n\theta) + isin(n\theta) = \sum_{k=0}^{k=n}(i)^k C_n^k \cos^{n-k}(x)\sin^k(x)$$

   $$cos(n\theta) = \sum_{k=0}^{k=E(\frac{n}{2})}(-1)^k C_n^{2k}\cos^{n-2k}(\theta)\sin^{2k}(\theta)$$

   $$sin(n\theta) = \sum_{k=1}^{k=E(\frac{n-1}{2})}(-1)^k C_n^{2k+1}\cos^{n-2k-1}(\theta)\sin^{2k+1}(\theta)$$

On obtient alors

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{k=E(\frac{n}{2})} (-1)^k C_n^{2k} x^{n-2k} (1-x^2)^{2k}$$

$$z_n(x) = \sum_{k=1}^{k=E(\frac{n-1}{2})} (-1)^k C_n^{2k+1} x^{n-2k-1} (1-x^2)^{2k+1}$$

(e) Les fonctions à valeurs réelles solutions de l'équation différentielle

$$\frac{d^2v}{d\theta^2} + n^2 v = 0$$

sont l'ensemble des fonctions $v(\theta) = \alpha\cos(n\theta) + \beta\sin(n\theta)$ lorsque $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Maintenant on pose $\arccos x = \theta$. $f(x) = f(\cos\theta)$ $\frac{d}{d\theta}(f \circ \cos)(\theta) = -\sin(\theta) f'(\cos\theta)$ $\frac{d^2}{d\theta^2}(f \circ \cos)(\theta) = -\cos(\theta)f'(\cos\theta) + \sin^2(\theta)f''(\cos\theta)$ Une fonction $f(x)$ est solution de

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + n^2 y = 0$$

si et seulement si $f(\cos\theta))$ est solution de :

$$\frac{d^2v}{d\theta^2} + n^2 v = 0$$

On déduit que y_n et z_n sont deux solutions sur $]-1,1[$ de l'équation différentielle :

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + n^2 y = 0$$

Les solutions générales sur $]-1,1[$ de l'équation différentielle sont les fonctions $f(x) = \alpha y_n(x) + \beta z_n(x)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

3. (a) Soit $y_1 \in \mathcal{C}^\infty]-1,1[$, $y_2 \in \mathcal{C}^\infty]-1,1[$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ alors

$$F(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha F(y_1) + \beta F(y_2).$$

F est une application linéaire.
Si $y \in \mathcal{C}^\infty]-1,1[$ alors $F(y) \in \mathcal{C}^\infty]-1,1[$, F est un endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty]-1,1[$.

(b) La fonction $y = 0$ est solution de $f(x, y(x), y'(x)) = 0$ Soit y une solution de l'équation différentielle $f(x, y(x), y'(x)) = 0$ qui s'annule en un point noté $x_0 \in]-1,1[$ alors $y(x_0) = 0$ et $y'(x_0) = 0$. D'après l'unicité de la solution du problème de Cauchy pour les équations différentielles alors $y = 0$. Donc si y est une solution non nulle de

$f(x, y(x), y'(x)) = 0$, elle ne s'annule jamais sur l'intervalle $]-1, 1[$. Elle vérifie :

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = (n - \frac{1}{2})\frac{-2x}{1-x^2}$$

Il existe $C \in \mathbb{R}^{+\star}$ telle que $y(x) = C(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}$. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $f(x, y(x), y'(x)) = 0$ est

$$\{y(x) = C(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}},\ C \in \mathbb{R}^+\}.$$

$u \in \mathrm{Ker}(F)$ et $u(0) = 1$ est équivalent à $u(x) = (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}$.

(c)

$$Y(x) = (1-x^2)y'(x) + (2x-1)xy(x)$$

En dérivant on obtient

$$Y^{(k)}(x) = \sum_{p=0}^{p=k} C_k^p (1-x^2)^{(p)} y^{(k-p+1)}(x) + \sum_{p=0}^{p=k} C_k^p (2n-1) x^{(p)} y^{(k-p)}(x)$$

$$Y^{(k)}(x) = ((2n-1)x - 2kx)y^{(k)}(x) + (1-x^2)y^{(k+1}(x) + (k(2n-1) - k(k-1))y^{(k-1)}(x)$$

Cette relation pour u donne :

$$(1-x^2)u^{(k+1)}(x) = -((2n-1)x - 2kx)u^{(k)}(x) - (k(2n-1) - k(k-1))u^{(k-1)}(x)$$

En particulier pour $x = 0$:

$$u^{(k+1)}(0) = -k(2n-k)u^{(k-1)}(0).$$

$u(0) = 1$ $u'(0) = 0$, une récurrence prouve :

$$u^{(2p)}(0) = (-1)^p 1 \times 3 \times 5 \cdots \times (2p-1)(2n-1)(2n-3)\cdots(2n-2p+1)$$

$$u^{(2p-1)}(0) = 0,\ u^{(2n)}(0) = (-1)^n((2n-1)!)^2.$$

(d) Utilisons la méthode de variation des constantes. Soit y une solution posons $y(x) = c(x)u(x)$ où $c(x)$ est la nouvelle inconnue. $c(x)$ est solution de l'équation

$$(1-x^2)c'(x) = \lambda c(x).$$

Si c n'est pas la fonction nulle alors

$$\frac{c'(x)}{c(x)} = \frac{\lambda}{1-x^2}$$

L'espresssion de c est : $c(x) = D(\frac{1+x}{1-x})^{\frac{\lambda}{2}}$ avec $D \in \mathbb{R}^{+\star}$ En ajoutant la solution nulle on trouve que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $f(x,y,y') = \lambda y$ est :

$$\{y(x) = D(\frac{1+x}{1-x})^{\frac{\lambda}{2}}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}},\ D \in \mathbb{R}^+\}$$

$$\{y(x) = D(1+x)^{\frac{\lambda}{2}+n-\frac{1}{2}}(1-x)^{n-\frac{1}{2}-\frac{\lambda}{2}},\ D \in \mathbb{R}^+\}$$

Les solutions sont des fonctions polynômes si et seulement si $\frac{\lambda}{2}+n-\frac{1}{2} \in \mathbb{N}$ et $n-\frac{1}{2}-\frac{\lambda}{2} \in \mathbb{N}$. Donc si on pose $\lambda = 2p-1$, il existe des solutions polynômes si et seulement si $p \in \mathbb{Z}$ et $-n+1 \leq p \leq n$. La solution, valant 1 en 0, est le polynôme $P_\lambda(x) = (1+x)^{n+p}(1-x)^{n-p}$.