ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2000

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

CORRIGE DE LA DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

EXERCICE n° 1

Il est clair que 1 et 2 sont des valeurs propres de multiplicité 2 (la matrice est triangulaire). Si on note E_1 (respectivement E_2) le sous-espace vectoriel propre associé à 1 (resp. 2), A est diagonalisable si et seulement si $Dim\, E_1 = 2$ et $Dim\, E_2 = 2$.

$$u = (x, y, z, t) \in E_1 \Leftrightarrow Au = u \Leftrightarrow \begin{cases} ax = 0 \\ bx + cy + z = 0 \\ bx + cy + dz + t = 0 \end{cases}$$

et $Dim\, E_1 = 2$ si et seulement si *a=0.*
De même $Dim\, E_2 = 2$, si et seulement si *d=0*.
En conclusion la matrice est diagonalisable si et seulement si *a=d=0*.

EXERCICE n° 2

❶ $< f^2(x), y >=< f(f(x)), y >= -< f(x), f(y) >=< x, f^2(y) >$, et l'application f^2 est symétrique.

$< f(x), x >= -< x, f(x) >$, d'où $2 < f(x), x >= 0$ et $< f(x), x >= 0$
$< f^2(x), x >= -< f(x), f(x) >= -\| f(x)\|^2 \leq 0$

❷ Soit λ une valeur propre de f^2, il existe alors u, non nul, tel que $f^2(u) = \lambda u$. On a $< f^2(u), u >= \lambda \|u\|^2 \leq 0$, donc $\lambda \leq 0$.

❸ Soit (e_i) une base orthonormale, $< e_i, e_j >= \delta_{ij}$ (symbole de Kronecker). Notons, $\forall i,\ f(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j$. On a :

$< f(e_i), e_j >=< \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j, e_j >= a_{ij}$ et $< f(e_i), e_j >= - < e_i, f(e_j) >= - < e_i, \sum_{i=1}^{n} a_{ji} e_i >= -a_{ji}$

En conclusion $a_{ij} = -a_{ji}$; la matrice est antisymétrique.

❹ Soit M la matrice associée à *f*, on a :

$$Q(u^2) = \det(M^2 - u^2 I) = \det(M - uI) \times \det(M + uI) = \det(M - uI) \times (-1)^n \det(-M - uI)$$

et comme *M* est antisymétrique,

$$Q(u^2) = \det(M - uI) \times (-1)^n \det(M' - uI) = \det(M - uI) \times (-1)^n \det(M - uI)'$$
$$Q(u^2) = (-1)^n \det(M - uI) \times \det(M - uI) = (-1)^n (P(u))^2$$

❺ Si λ est une racine de *P* dans *C* (existence assurée par le théorème de Cayley-Hamilton), λ^2 est une racine de *Q* (❹) et λ^2 est négative (❷), donc λ est un imaginaire pur.

EXERCICE n° 3

❶ La matrice Ω est orthogonale si les vecteurs colonnes sont deux à deux orthogonaux et unitaires, à savoir :

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 \text{ et } ab + bc + ca = 0$$

et si :

$$\det \Omega = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = a + b + c = 1$$

Les deux conditions $\begin{cases} a + b + c = 1 \\ ab + bc + ca = 0 \end{cases}$ entraînent les conditions précédentes et sont suffisantes pour obtenir la propriété. Elles montrent que *a, b, c* doivent être solutions d'une équation de la forme : $t^3 - t^2 + k = 0$ dont les racines doivent être toutes réelles. En examinant les extrema locaux de cette fonction $t^3 - t^2 + k$, à l'aide du tableau de variation, on obtient : $0 \leq k \leq \dfrac{4}{27}$.

❷ Soit $k=\frac{4}{27}\sin^2\varphi$, où $0\leq\varphi\leq 2\pi$ et faisons dans l'équation le changement de variable $t=\frac{1}{3}+\lambda\cos\alpha$, on obtient :

$$\lambda^3\cos^3\alpha-\frac{\lambda}{3}\cos\alpha=\frac{2}{27}(1-2\sin^2\varphi)=\frac{2}{27}\cos 2\varphi$$

Rappelons que $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$ et pour $\lambda=\frac{2}{3}$ l'équation devient,

$\frac{2}{27}(4\cos^3\alpha-3\cos\alpha)=\frac{2}{27}\cos 2\varphi$ ou $\cos 3\alpha=\cos 2\varphi$; On obtient alors : $\alpha=\pm(\frac{2}{3}\varphi+\frac{2n\pi}{3})$

A une permutation près, on a :

$$a=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cos\frac{2\varphi}{3},\quad b=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cos\frac{2\varphi+2\pi}{3},\quad c=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cos\frac{2\varphi-2\pi}{3}$$

L'axe de la rotation est le vecteur propre pour la valeur propre 1, en remarquant que $a+b+c=1$, on trouve comme vecteur directeur unitaire : $\delta=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$

Si ω est l'angle de la rotation ($0\leq\omega\leq 2\pi$), la matrice est semblable à

$$\Delta=\begin{pmatrix}\cos\omega & -\sin\omega & 0\\ \sin\omega & \cos\omega & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

d'où $2\cos\omega+1=Tr\Delta=3a=1+2\cos\frac{2\varphi}{3}$ et en considérant en outre le transformé de $u=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$, orthogonal à δ, par la rotation Δ, on obtient $\sin\omega=\sin\frac{2\varphi}{3}$, d'où $\omega=\frac{2\varphi}{3}$

En permutant *b* et *c*, on obtiendrait $\omega=-\frac{2\varphi}{3}$, l'axe étant le même. Dans une permutation circulaire, on obtiendrait $\omega=\frac{2\varphi+2\pi}{3}$

En conclusion trois rotations de même axe vérifient les conditions imposées.

EXERCICE n° 4

Soit $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

❶ On vérifie que $P(M) = M^2 + M - 2I$

❷ Le reste de la division euclidienne de X^n par *P(X)* est un polynôme de degré 1.

$$X^n = (X^2 + X - 2)Q(X) + aX + b$$

Pour *X=1*, on obtient *a+b=1*

Pour *X=-2*, on a $(-2)^n = -2a + b$, d'où $a = \dfrac{1-(-2)^n}{3}$ et $b = \dfrac{2+(-2)^n}{3}$

❸ On a $M^n = (M^2 + M - 2I)Q(M) + aM + bI$ et $M^2 + M - 2I = 0$, donc $M^n = aM + bI$, à savoir : $M^n = \begin{pmatrix} b-a & a & a \\ a & b-a & a \\ a & a & a \end{pmatrix}$

La résolution du système donne : $U_n = M^n U_0$ et plus précisément,

$$\begin{cases} x_n = b - a = 1/3\left[1 + (-1)^n 2^{n+1}\right] \\ y_n = 3a - b = 1/3\left[1 - (-1)^n 2^{n+2}\right] \\ z_n = b - a = 1/3\left[1 + (-1)^n 2^{n+1}\right] \end{cases}$$

EXERCICE n° 5

On calcule le $\det A_\lambda$ de la façon suivante : on ajoute la troisième colonne à la première, puis on soustrait la troisième ligne à la première, le terme λ^2 se met en facteur, puis on retranche la première colonne à la troisième pour obtenir :

$$\det A_\lambda = \lambda^2 \begin{vmatrix} 0 & 2+\lambda & -1 \\ 1+\lambda & 2-\lambda & -1 \\ 1+\lambda+\lambda^2 & 1-\lambda & -1 \end{vmatrix}$$

d'où $\det A_\lambda = -\lambda^2(\lambda-1)(2\lambda^2+2\lambda+1)$.

- Pour $\lambda = 0$, la matrice devient $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Le noyau est de dimension 2 et *rgA*=1

Le noyau est engendré, par exemple, par les vecteurs (1,-1,0) et (0,0,1). L'image est une droite vectorielle engendrée par le vecteur (1,0,1).

- Pour $\lambda = 1$, $rgA_1 = 2$ et l'image est engendrée par les vecteurs (1,0,-1) et (3,1,0). Par conséquent, $\dim KerA_1 = 1$ et le noyau est engendré par le vecteur (-2,1,1).

- Pour $\lambda \neq 0{,}1$, on vérifie que les 3 colonnes sont indépendantes, donc $\dim \operatorname{Im} A_\lambda = 3$ et $\dim KerA_\lambda = 0$

PROBLEME

❶ On a $\dim KerA + \dim \operatorname{Im} A = 3$.

On vérifie que $KerA = \{0\}$, d'où $\dim \operatorname{Im} A = 3$ et la résolution du système donne :
$\operatorname{Im} A = \{(X,Y,Z,T) / Y - X = T - Z\}$.

Comme les vecteurs y_1, y_2, y_3 sont linéairement indépendants, ils forment une base de $\operatorname{Im} A$.

❷ E_3 et $\operatorname{Im} A$ ont la même dimension, il est donc possible de construire un isomorphisme entre ces 2 espaces vectoriels.
Pour déterminer $\tilde{A}$ pour la base canonique de R^3, il suffit de calculer les images des vecteurs de cette base, exprimées dans la base de $\operatorname{Im} A$.

$\tilde{A}(1,0,0) = A(1,0,0) = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3$, puis on calcule les valeurs λ_i en résolvant le système : $\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \lambda_1 + \lambda_3 = 2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 4$. Finalement $\tilde{A}(1,0,0) = (-2,3,4)$.
De même pour les deux autres vecteurs, on obtient :

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -7 \\ 3 & 5 & 10 \\ 4 & 7 & 12 \end{pmatrix}$$

Comme $\tilde{A}$ est une bijection, il existe une matrice inverse $\tilde{A}^{-1}$. D'autre part, $E_4 = \operatorname{Im} A \oplus (\operatorname{Im} A)^{\perp}$, on peut donc définir A^+ de la façon suivante :

$$A^+ y = \begin{cases} \tilde{A}^{-1} y & si \quad y \in \operatorname{Im} A \\ 0 & si \quad y \in (\operatorname{Im} A)^{\perp} \end{cases}$$

Par ailleurs A^+ est unique puisque la décomposition dans la somme directe est unique.

La matrice inverse de $\tilde{A}$ est :

$$\tilde{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -10 & -13 & 5 \\ 4 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Soit $y_4 = (1,-1,-1,1)$ un vecteur de $(\operatorname{Im} A)^{\perp}$. La matrice A^+ relative aux bases $\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ de E_4 et à la base canonique de R^3 est :

$$A^+ = \begin{pmatrix} -10 & -13 & 5 & 0 \\ 4 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour l'obtenir dans les deux bases canoniques, il suffit de la multiplier à droite par la matrice de passage suivante :

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

En conclusion, on obtient :

$$A^{+}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-38 & -2 & -14 & 22\\ 13 & 3 & 3 & -7\\ 5 & -1 & 3 & -3\end{pmatrix}$$

❸ Notons X la matrice des vecteurs $\{y_1, y_2, y_3\}$, la matrice de projection orthogonale sur $\operatorname{Im} A$ s'écrit :

$P_A = X(X^{'}X)^{-1}X^{'}$, où $X=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

On obtient $(X^{'}X)^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4 & -2 & -2\\ -2 & 3 & 1\\ -2 & 1 & 3\end{pmatrix}$, puis

$$P_A=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 3 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 3 & 1\\ -1 & 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

- Le calcul des produits des matrices donne : $A^{+}A = I_3$ et $AA^{+} = P_A$.

❹ $f(x+h)-f(x) = <A(x+h)-b, A(x+h)-b>_4 - <Ax-b, Ax-b>_4$
En développant cette expression, on obtient :

$$f(x+h)-f(x) = 2<Ax-b, Ah>_4 + \|Ah\|^2$$

et $\|Ah\|^2 = o(\|h\|)$

La fonction *f* est donc différentiable et $df(x): h \mapsto 2<Ax-b, Ah>_4$.

Par ailleurs $<Ax-b, Ah>_4 = (Ah)^{'}(Ax-b) = h^{'}(A^{'}(Ax-b)) = <A^{'}Ax - A^{'}b, h>_3$

On vérifie que $A^{'}$ est une application de E_4 dans E_3, dont le noyau est engendré par le vecteur y_4. $Ker\, A^{'}$ est donc orthogonal à $\operatorname{Im} A$, d'où $A^{'}$ est une bijection de $\operatorname{Im} A$ sur E_3 et $A^{'}A$ est une bijection de E_3 sur E_3, donc elle est inversible. Par conséquent, il existe un unique $\bar{x}$ tel que : $\bar{x} = (A^{'}A)^{-1}A^{'}b$.

La fonction *f* étant strictement convexe et différentiable, x réalise le minimum de *f* si et seulement si $df(x)(h) = 0, \forall h$ ou encore $A^{'}Ax = A^{'}b$. Ce qui correspond au résultat précédent.

Le minimum est obtenu au point $\hat{b}$ qui est la projection orthogonale de b sur $\operatorname{Im} A$.

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2000

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

I Etudes de suites

❶ Montrons par récurrence sur $n \geq 1$ la propriété :

$P(n)$: c_n et λ_n existent et valent $c_n = \cos(\frac{\pi}{2^n}); \lambda_n = 2^n \sin(\frac{\pi}{2^n})$.

La propriété $P(1)$ est vraie.

Si l'on suppose $P(n)$ vraie alors c_n est positif (car $c_n = \cos(\frac{\pi}{2^n})$) donc c_{n+1} existe et vaut $c_{n+1} = \sqrt{\frac{1+\cos(\frac{\pi}{2^n})}{2}} = \cos(\frac{\pi}{2^{n+1}})$.

Comme c_{n+1} est positif alors λ_{n+1} existe et vaut :

$$\lambda_{n+1} = \frac{\lambda_n}{c_{n+1}} = \frac{2^n \sin(\frac{\pi}{2^n})}{\cos(\frac{\pi}{2^n})} = 2^{n+1} \sin(\frac{\pi}{2^{n+1}}) .$$

On pose alors $\theta_n = \frac{\pi}{2^n}$ et $\alpha_n = 2^n$. On a $\sin x \overset{x\to 0}{\sim} x$ donc

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lim_{n\to\infty} 2^n \sin(\frac{\pi}{2^n}) = \lim_{n\to\infty} 2^n \frac{\pi}{2^n} = \pi.$$

❷ Rappelons la propriétée $\forall x \in R, \left|\sin^{(2p+3)}(x)\right| \leq 1$.

L'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2p+1 appliquée à la fonction sinus entre 0 et x donne :

$$\left|\sin x - \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right| \leq \frac{|x|^{2p+3}}{(2p+3)!}$$

En particulier pour p=0 et $x = \frac{\pi}{2^n}$ on déduit

$$|\pi - \lambda_n| = 2^n \left|\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) - \frac{\pi}{2^n}\right| \leq \frac{\pi^3}{6 \times 4^n}$$

On peut prendre $N_1 = 12$ car on a $\frac{\pi^3}{6 \times 4^n} \leq 10^{-6}$

❸ L'inégalité de la question ❷ appliquée à $x = \frac{\pi}{2^n}$, après multiplication par 2^n, donne :

$$\left|\lambda_n - \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{\pi^{2k+1}}{4^{nk}(2k+1)!}\right| \leq \frac{\pi^{2p+3}}{4^{n(p+1)}(2p+3)!}$$

Comme $\frac{1}{4^{n(p+1)}}$ est négligeable devant $\frac{1}{4^{np}}$, on déduit le développement :

$$\lambda_n = \pi - \frac{\pi^3}{3!}\frac{1}{4^n} + \ldots + (-1)^p \frac{\pi^{2p+1}}{(2p+1)!}\frac{1}{4^{pn}} + o\left(\frac{1}{4^{pn}}\right)$$

❹ Pour p=2 le développement précédent donne :

$$\lambda_n = \pi - \frac{\pi^3}{3!}\frac{1}{4^n} + \frac{\pi^5}{120 \times 4^{2n}} + o\left(\frac{1}{4^{2n}}\right)$$

On en déduit : $\lambda_n^{(1)} = \pi - \frac{\pi^5}{30 \times 4^{2n+2}} + o\left(\frac{1}{4^{2n}}\right)$

Et $\lambda_n^{(1)} - \pi \sim -\frac{\pi^5}{30 \times 4^{2n+2}}$

❺ Pour tout α la formule de la question ❹ donne :

$$\alpha\lambda_n^{(1)} + (1-\alpha)\lambda_{n+1}^{(1)} = \pi - \frac{\pi^5}{30 \times 4^{2n+4}}(15\alpha + 1) + o\left(\frac{1}{4^{2n}}\right)$$

le réel $\alpha = -\frac{1}{15}$ est l'unique réel tel que $\lambda_n^{(2)} - \pi$ est négligeable devant 16^{-n}.

❻ L'inégalité de la question ❸ pour p=2 prouve

$$-\frac{\pi^7}{7!4^{3n}} \le \lambda_n - \pi + \frac{\pi^3}{6\times 4^n} - \frac{\pi^5}{120\times 16^n} \le \frac{\pi^7}{7!4^{3n}}$$

En combinant les inégalités obtenues pour n et n+1 on déduit :

$$\left|\lambda_n^{(1)} - \pi + \frac{4\pi^5}{120\times 16^{n+1}}\right| \le \frac{68\pi^7}{3\times 7!4^{3n+3}}$$

En combinant à nouveau ces inégalités pour n et n+1 on a :

$$-\frac{17\pi^7}{9\times 7!4^{3n+3}} \le \lambda_n^{(2)} - \pi \le \frac{17\pi^7}{9\times 7!4^{3n+3}}$$

Finalement $\left|\lambda_n^{(2)} - \pi\right| \le \dfrac{17\pi^7}{576\times 7!4^{3n}}$ On constate que pour $N_2 = 3$ on a :

$$\left|\lambda_n^{(2)} - \pi\right| \le 10^{-6}.$$

II Polynômes de Bernoulli

❶ L'application F définie par $F(x) = G(x) - A$, où A est le nombre réel $A = \int_0^1 G(t)dt$, convient car F est, comme G de classe C^1 et de dérivée f et en outre on a $\int_0^1 F(t)dt = \int_0^1 G(t)dt - A = 0$. Si F_1 et F_2 sont deux solutions, $C = F_1 - F_2$ est de dérivée nulle sur $[0,1]$, elle est donc constante sur $[0,1]$ et on a $C = \int_0^1 Cdt = 0$ Il existe donc une unique application de classe C^1 vérifiant les deux conditions

❷ D'après la question précédente les conditions données définissent une unique suite $(B_n)_{n\ge 0}$ de fonctions de classe C^1.
Par définition de cette suite on a
$\forall n \in N, B_n^{(n)} = 1$ donc B_n est une fonction polynômiale de degré n et de terme dominant $\dfrac{X^n}{n!}$. D'après la question ❶ On a

$$\forall n \in N\, B_{n+1}(x) = \int_0^x B_n(t)dt - \int_0^1 B_n(t)dt$$

On en déduit

$B_1 = X - 0{,}5$ $B_2 = \dfrac{6X^2 - 6X + 1}{12}$ $B_3 = \dfrac{2X^3 - 3X^2 + X}{12}$ $B_4 = \dfrac{X^4 - 2X^3 + X^2}{24} - \dfrac{1}{24 \times 30}$

❸ Pour $n \geq 2$ on a $B_n(0) = B_n(1)$ .car :

$$B_n(1) - B_n(0) = \int_0^1 B_n^{'}(t)dt = \int_0^1 B_{n-1}(t)dt = 0$$

❹ La suite $(C_n)_{n\geq 0}$ vérifie les conditions de définition de la suite $(B_n)_{n\geq 0}$. En effet, on a :

$C_à = B_0 = 1$ et si on a $B_n = C_n$, alors on a

$C_{n+1}^{'}(X) = (-1)^{n+1}(-B_{n+1}^{'}(1-X)) = (-1)^n(-B_n(1-X)) = C_n(X)$

Et en posant $u = 1 - t$

$$\int_0^1 C_{n+1}(t)dt = (-1)^{n+1}\int_0^1 B_{n+1}(u)du = 0$$

L'unicité de la suite $(B_n)_{n\geq 0}$ assure l'égalité.

Ainsi on a pour tout n et tout x

$B_n(x) = (-1)^n B_n(1-x)$

Le graphe de B_n est donc symétrique par rapport à la droite d'équation x=0,5 si n est pair. Il est symétrique par rapport au point de coordonnées (0,5 , 0) si n est impair. En particulier pour n impair et x=0,5 on déduit

$B_n(0{,}5) = 0$ et pour x=0, tenant compte de $B_n(0) = B_n(1)$, on déduit

$B_n(0) = B_n(1) = 0$

❺ Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe $m \in N$ tel que B_{2m+1} s'annule sur $\left]0, \dfrac{1}{2}\right[$ et considérons m_0 le plus petit de ces entiers m.

Comme $B_1 = X - 0{,}5$ on a $m_0 \geq 1$ On sait que B_{2m_0+1} s'annule sur $\left]0, \dfrac{1}{2}\right[$; il s'annule donc au moins trois fois $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$. D'après le théorème de Rolle, $B_{2m_0} = B_{2m_0+1}^{'}$ s'annule donc au moins deux fois sur . Cette dernière propriété contredit le caractère minimal de m_0. L'hypothèse était absurde.

Pour $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$; il existe $c \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ tel que
$B_{2m}(x) - B_{2m}(0) = xB_{2m}^{'}(c) = xB_{2m-1}(c)$
Ainsi, sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ $B_{2m}(x) - B_{2m}(0)$ a le signe de B_{2m-1} . Il en est de même sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ car pour $x > 0{,}5$ on a $c \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ tel que

$$B_{2m}(x) - B_{2m}(0) = B_{2m}(1-x) - B_{2m}(0) = (1-x)B_{2m}^{'}(c) = (1-x)B_{2m-1}(c)$$

III Séries de Riemann et nombres de Bernoulli

❶ Pour tout N entier naturel non nul et $t \in \left]0,1\right[$ on a $e^{2ik\pi t} \neq 1$ et :

$$1 + 2\sum_{k=1}^{N} \cos(2k\pi t) = \sum_{k=-N}^{k=N} e^{2ik\pi t} = e^{-2iN\pi t}\,\frac{1 - e^{-2i(2N+1)\pi t}}{1 - e^{-2i\pi t}} = \frac{\sin((2N+1)\pi t)}{\sin(\pi t)}.$$

❷ Sur $\left]0,1\right[$ on a

$\varphi_n(t) = \dfrac{f(t)}{g(\pi t)}$ avec $f(t) = \dfrac{B_b(t) - B_n(0)}{\pi t}$ et $g(t) = \dfrac{\sin t}{t}$.

Or f est une fonction polynomiale donc elle admet un prolongement C^∞ sur R. On prolonge la fonction g en zéro en posant $g(0) = 1$, le prolongement de g est alors une fonction C^∞ sur R car c'est une fonction développable en série entière de rayon infinie, de plus g ne s'annule sur R. Donc φ_n admet un prolongement continûment dérivable. à $[0,1]$.

❸ Soit f une fonction continûment dérivable sur $[0,1]$. Notons M_0 la borne supérieure de $|f|$ sur $[0,1]$ et M_1 la borne supérieure de $|f^{'}|$ sur $[0,1]$.

$$\left|\int_0^1 f(t)\sin(xt)dt\right| = \left|-\frac{1}{x}\left[f(t)\cos(xt)\right]_0^1 + \frac{1}{x}\int_0^1 f^{'}(t)\cos(xt)dt\right| \leq \frac{2M_0 + M_1}{x}$$

On en déduit que $\lim\limits_{x\to\infty} \int_0^1 f(t)\sin(xt)dt = 0$

❹ Pour n impair le changement de variable $t = 1 - u$ montre que l'on a $I_{n,k} = 0$.
Pour $n \geq 4$ pair on a $B_{n-1}(0) = B_{n-1}(1) = 0$ et deux intégrations par parties donnent :

$$I_{n,k} = \left[B_n(t) \frac{\sin(2k\pi t)}{2k\pi} \right]_0^1 - \int_0^1 B_n^{'}(t) \frac{\sin(2k\pi t)}{2k\pi} dt$$

$$= \left[B_{n-1}(t) \frac{\cos(2k\pi t)}{(2k\pi)^2} \right]_0^1 - \int_0^1 B_{n-1}^{'}(t) \frac{\cos(2k\pi t)}{(2k\pi)^2} d$$

$$= - \int_0^1 B_{n-2}(t) \frac{\cos(2k\pi t)}{(2k\pi)^2} d = \frac{I_{n-2,k}}{4k^2\pi^2}.$$

Reprenons le calcul avec n=2, en tenant compte de
$B_1(1) = -B_1(0) = \frac{1}{2}$. On trouve
$I_{2,k} = \frac{1}{(2k\pi)^2}$. On déduit $I_{2p,k} = \frac{(-1)^{p-1}}{(2k\pi)^{2p}}$.

❺ Comme $\int_0^1 \cos(2k\pi t) dt = 0$ pour $k \geq 1$ on a pour $m \geq 1$ et N entier naturel :

$$\int_0^1 \varphi_{2m}(t) \sin\big((2N+1)\pi t\big) dt = \int_0^1 \big(B_{2m}(t) - B_{2M}(0)dt\big) + 2\sum_{k=1}^{N} \int_0^1 \big(B_{2m}(t) - B_{2M}(0)dt\big) \cos\big((2N+1)\pi t\big) dt$$

$$= -B_{2M}(0) + 2\sum_{k=1}^{N} I_{2m,k}$$

$$= -B_{2M}(0) + 2(-1)^{m-1} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{(2k\pi)^{2m}}$$

La fonction φ_{2m} étant C^1 sur $[0,1]$, la question ❸ prouve que :

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^{2m}} = (-1)^{m-1} 2^{2m-1} \pi^{2m} B_{2m}(0)$$

Donc la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}}$ converge et a pour somme $(-1)^{m-1} 2^{2m-1} \pi^{2m} B_{2m}(0)$
En particulier on trouve

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^{42}}{90}.$$

❻ Pour $p \geq 2$ et $k \geq 1$ on a $k^p \geq k^2$. En majorant $\dfrac{1}{k^2}$ par $\displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^2}$ pour $k \geq 2$, on obtient :

$$\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^P} \leq \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^2} = 2$$

On en déduit

$$\left|B_{2m}(0)\right| \leq \left(\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^{2m}}\right) 2^{1-2m} \pi^{-2m} \leq \frac{4}{\left(4\pi^2\right)^m}.$$

IV Formule sommatoire d'Euler

❶ Montrons cette formule par récurrence sur m.

Pour m=0 on a $B_1(1) = -B_1(0) = \dfrac{1}{2}$ donc

$$\int_0^1 f'(t) B_1(t)dt = \left[f(t)B_1(t)\right]_0^1 - \int_0^1 f(t)dt = \frac{f(0)+f(1)}{2} - \int_0^1 f(t)dt$$

c'est la formule demandée.

Supposons cette formule vraie pour $m \geq 1$ et considérons f de classe C^{2m+3}. On a

$$\int_0^1 f^{(2m+3)}(t) B_{(2m+3)}(t)dt = \left[f^{(2m+2)}(t) B_{(2m+3)}(t)\right]_0^1 - \int_0^1 f^{(2m+2)}(t) B'_{(2m+3)}(t)dt$$

Ce qui, d'après les résultats de la partie II prouve

$$\int_0^1 f^{(2m+3)}(t) B_{(2m+3)}(t)dt = -\int_0^1 f^{(2m+2)}(t) B_{(2m+2)}(t)dt$$

Une intégration par partie donne

$$\int_0^1 f^{(2m+3)}(t) B_{(2m+3)}(t)dt - \left[f^{(2m+1)}(t) B_{(2m+2)}(t)\right]_0^1 + \int_0^1 f^{(2m+1)}(t) B'_{(2m+2)}(t)dt =$$

$$B_{(2m+2)}(0) \frac{f^{(2m+1)}(1) - f^{(2m+1)}(0)}{2} + \int_0^1 f^{(2m+1)}(t) B_{(2m+1)}(t)dt$$

L'hypothèse de récurrence permet d'obtenir la formule pour m+1.

❷ Une intégration par partie donne :

$$\int_0^1 f^{(2m+1)}(t)B_{(2m+1)}(t)dt = \left[f^{(2m+1)}(t)\left(B_{(2m+2)}(t) - B_{(2m+2)}(0)\right)\right]_0^1$$
$$- \int_0^1 f^{(2m+2)}(t)\left(B_{(2m+2)}(t) - B_{(2m+2)}(0)\right)dt$$
$$= -\int_0^1 f^{(2m+2)}(t)\left(B_{(2m+2)}(t) - B_{(2m+2)}(0)\right)dt$$

Comme $B_{(2m+2)}(t) - B_{(2m+2)}(0)$ est de signe constant que l'on note ε sur $[0,1]$, on déduit :

$$-\varepsilon \inf_{t\in[0,1]} f^{(2m+2)}(t)B_{(2m+2)}(0) \leq \varepsilon \int_0^1 f^{(2m+2)}(t)\left(B_{(2m+2)}(t) - B_{(2m+2)}(0)\right)dt \leq -\varepsilon \sup_{t\in[0,1]} f^{(2m+2)}(t)B_{(2m+2)}(0)$$

On a alors :

$$\inf_{t\in[0,1]}\left[f^{(2m+2)}(t)B_{(2m+2)}(0)\right] \leq \int_0^1 f^{(2m+1)}(t)B_{(2m+1)}(t)dt \leq \sup_{t\in[0,1]}\left[f^{(2m+2)}(t)B_{(2m+2)}(0)\right]$$

L'existence de c est conséquence du théorème des valeurs intermédiaires.
La majoration est alors :

$$\left|\int_0^1 f^{(2m+1)}(t)B_{(2m+1)}(t)dt\right| \leq \left\|f^{(2m+2)}\right\|\left|B_{(2m+2)}(0)\right|$$

❸ Notons $T(f)=\frac{1}{n}\left(\frac{f(0)+f(1)}{2}+\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$ et $h=\frac{1}{n}$.

Les formules obtenues aux questions IV ❶ et ❷ lorsque m=2 donnent l'existence de constantes C_i bornées en valeur absolue par $\left\| f^{(6)} \right\|$ telles que :

$$\frac{1}{h}\int_{ih}^{(i+1)h} f(x)dx=\int_0^1 f(ih+ht)dt=\frac{f((i+1)h)+f(ih)}{2}-B_2(0)h\left(f'((i+1)h)-f'(ih)\right)$$
$$-B_4(0)h^3\left(f^{(3)}((i+1)h)-f^{(3)}(ih)\right)-B_6(0)h^6C_i$$

En sommant ces relations on obtient :

$$\int_0^1 f(t)dt=T(f)-B_2(0)\left(f'(1)-f'(0)\right)h^2-B_4(0)\left(f^{(3)}(1)-f^{(3)}(0)\right)h^4-r(h)$$

avec $|r(h)|\leq h^6B_6(0)\left\| f^{(6)} \right\| \leq \left\| f^{(6)} \right\| \frac{h^6}{16\pi^6}$

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2000

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

CORRIGE DU CALCUL NUMERIQUE

EXERCICE I

a) f est continue, car composition des deux fonctions continues $x \mapsto \sin x$ et $t \mapsto |t|$. On a

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1 \neq -1 = \lim_{x \to 0^-} \frac{-\sin x}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0},$$

donc *f* n'est pas dérivable en 0. La plus petite période est π.

b) $T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}(-1)^k (x - \frac{\pi}{2})^{2k}$. Rayon de convergence infini. $I = [0, \pi]$.

c) Comme *f* est une fonction paire on a $b_1 = b_2 = \cdots = 0$. Les autres coefficients sont donnés par

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |\sin x| \cos kx \mathrm{d}x.$$

En intégrant (deux fois) par parties on obtient

$$\int \sin x \cos kx \mathrm{d}x = \frac{\cos x \cos kx + k \sin x \sin kx}{k^2 - 1} + C, k \neq 1,$$

et

$$\int \sin x \cos x \mathrm{d}x = \frac{(\sin x)^2}{2} + C.$$

Ainsi on arrive à $a_k = 0$ pour *k* impair et $a_k = -\frac{4}{(k^2 - 1)\pi}$ pour *k* pair.

d) $T_4(\frac{\pi}{4}) = \sum_{k=0}^{2} \frac{1}{(2k)!}(-1)^k (\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2})^{2k} = 1 - \frac{\pi^2}{32} + \frac{\pi^4}{1024} \approx 0{,}786700927.$

$$F_4(\frac{\pi}{4}) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos\frac{\pi}{2}}{3} + \frac{\cos\pi}{15} \right) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{15\pi} \approx 0{,}721502408.$$

$$f(\frac{\pi}{4}) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707106781.$$

Donc F_4 est une meilleure approximation en $\frac{\pi}{4}$.

EXERCICE II

1) $\lim_{t \to 0^+} F(t) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^5}{e^x - 1} = 0,$ car l'exponentielle croît plus vite que toute puissance.

$\lim_{t \to +\infty} F(t) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^5}{e^x - 1} = \lim_{x \to 0^+} \frac{5x^4}{e^x} = 0,$ d'après la règle de l'Hôpital.

F est continue, strictement positive et tend vers 0 aux bords de son domaine de définition. Elle possède donc un maximum.

2) $F(0{,}05) \approx 0{,}01$
$F(0{,}1) \approx 4{,}54$
$F(0{,}15) \approx 16{,}78$
$F(0{,}2) \approx 21{,}20$
$F(0{,}25) \approx 19{,}1$
$F(0{,}3) \approx 15{,}2$
$F(0{,}4) \approx 8{,}7$
$F(0{,}5) \approx 5{,}0$
$F(0{,}6) \approx 3{,}00$
$F(0{,}7) \approx 1{,}87$
$F(0{,}8) \approx 1{,}22$
$F(0{,}9) \approx 0{,}83$
$F(1{,}0) \approx 0{,}58$

Il y a donc un maximum en $0{,}2 \pm 5 \times 10^{-2}$.

3) F est dérivable, donc si t est maximum de F alors $F'(t)=0$.

$$F'(t)=-5t^{-6}\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)^{-1}+t^{-5}\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)^{-2}e^{\frac{1}{t}}t^{-2}=-t^{-7}\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)^{-2}\left(5t\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-e^{\frac{1}{t}}\right).$$

Donc $F'(t)=0$ si et seulement si $5t\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-e^{\frac{1}{t}}=0.$

4) Avec $t=\frac{1}{x}$ l'équation $5t\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-e^{\frac{1}{t}}=0,\ t>0,$ devient $5(e^{x}-1)-xe^{x}=0$ ou bien $5(1-e^{-x})-x=0$, q.e.d.

5) $f'(x)=5e^{-x}>0,$ donc f est croissant.

$f(4)=4{,}90\ldots>4,$

$f(5)=4{,}96\ldots<5,$

ainsi $f([4,5])\subset[4,5]$.

$q:=\sup_{x\in[4,5]}|f'(x)|=5e^{-4}=0{,}09157\ldots<1,$

donc d'après le théorème du point fixe il existe une solution unique de $f(x)=x$ dans l'intervalle $[4,5]$.

6) $f'(x)>1$ pour $x<\ln 5$. Alors la fonction $f(x)-x$ est strictement croissante pour $x<\ln 5$. Comme $f(0)=0$, on a $f(x)>x$ pour tout $x\in\left]0,\ln 5\right].$ Pour $x>\ln 5$ la fonction $f(x)-x$ est strictement décroissante, donc admet au plus une racine qui doit alors être celle qu'on a trouvé dans l'intervalle $[4,5]$ de la question précédente.

7) D'après 1) on sait que F possède un maximum et d'après les questions précédentes il est unique : $\tau=\xi^{-1}$, où ξ est l'unique solution de $f(x)=x$, $x>0$.

9) D'après le théorème du point fixe la suite $x_0:=5$, $x_n:=f(x_{n-1}),$ converge vers ξ, et on dispose de la majoration

$$|\xi-x_n|\le\frac{q}{1-q}|x_n-x_{n-1}|=\frac{5e^{-4}}{1-5e^{-4}}|x_n-x_{n-1}|\le 0{,}101|x_n-x_{n-1}|.$$

Le calcul à $\pm10^{-6}$ près donne

$x_0=5$

$x_1=4{,}966310\ldots$

$x_2=4{,}965155\ldots$

$x_3=4{,}964115\ldots$

$x_4=4{,}965114\ldots$

$x_5=4{,}965114\cdots$

Par suite $\xi=4{,}965114\pm10^{-6}.$ Donc $\tau=\xi^{-1}=0{,}2014052\pm10^{-7}$ est la maximum de *F*.